

Déterminant de Gram

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$

Partie I

1. Soit u et v deux vecteurs quelconques de E .

On note $Gram(u, v) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{pmatrix}$ et $G(u, v) = \det(Gram(u, v))$.

Montrer que $G(u, v) \geq 0$. A quelle condition y a-t-il égalité ?

2. Soit u, v et w trois vecteurs quelconques de E .

On note $Gram(u, v, w) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (w|u) & (w|v) & (w|w) \end{pmatrix}$ et $G(u, v, w) = \det(Gram(u, v, w))$.

- 2.a On suppose que w est orthogonal à u et v .

Exprimer $G(u, v, w)$ en fonction de $G(u, v)$.

- 2.b On suppose que w est combinaison linéaire de u et v .

Calculer $G(u, v, w)$.

- 2.c On suppose que $w = t + n$ avec t combinaison linéaire de u et v , et n orthogonal à u et v .

Montrer que $G(u, v, w) = G(u, v) \|n\|^2$.

- 2.d Etablir l'équivalence : (u, v, w) est libre $\Leftrightarrow G(u, v, w) \neq 0$.

Partie II

Soit $u_1, \dots, u_n$ n vecteurs de E .

On note : $Gram(u_1, \dots, u_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indice (i, j) est $(u_i | u_j)$ et

$G(u_1, \dots, u_n)$ le déterminant de celle-ci.

1. On suppose la famille $(u_1, \dots, u_n)$ liée. Montrer que $G(u_1, \dots, u_n) = 0$.

2. On suppose la famille $(u_1, \dots, u_n)$ libre. On introduit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$ et on note $A = (a_{i,j})$ la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(u_1, \dots, u_n)$.

- 2.a Exprimer $(u_i | u_j)$ à l'aide des coefficients de la matrice A .

- 2.b Montrer que $Gram(u_1, \dots, u_n) = {}^t A A$. En déduire que $G(u_1, \dots, u_n) > 0$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F .

On appelle distance de x vecteur de E au sous-espace vectoriel F le réel : $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

- 3.a En écrivant $x = x_F + n$ avec $x_F \in F$ et $n \in F^\perp$, démontrer que $d(x, F) = \|n\|$.

- 3.b Etablir : $d(x, F) = \sqrt{\frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$.

Partie III

1. Pour tout polynôme P et Q de $\mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Désormais, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $(P|Q)$ au lieu de $\varphi(P, Q)$ le produit scalaire de deux éléments P et Q de $\mathbb{R}[X]$.

2.a On désire calculer $d = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - (at+b))^2 dt$.

Interpréter d à l'aide de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E à préciser.

2.b Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$.

2.c Donner la valeur de d .

Partie IV

Soit p un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ des réels tels que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $a_i > 0$, $b_i \geq 0$ et pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, p\}$, $b_i \neq b_j$.

Le but de cette partie est de calculer le déterminant de la matrice :

$$\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_p} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \dots & \frac{1}{a_2 + b_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \frac{1}{a_p + b_2} & \dots & \frac{1}{a_p + b_p} \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}).$$

Ce déterminant sera noté $C_p(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$.

1. Soit $F(X) = \frac{(X - a_1) \cdots (X - a_{p-1})}{(X + b_1) \cdots (X + b_p)}$.

Réaliser la décomposition en éléments simples de F .

2. On note D le déterminant d'ordre p :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_{p-1}} & F(a_1) \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_2 + b_{p-1}} & F(a_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \dots & \frac{1}{a_p + b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}.$$

En calculant D de deux façons, établir :

$$F(a_p) C_{p-1}(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)} C_p(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p).$$

3. En déduire : $C_p(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j)}$.

4.a Calculer $\Delta_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \dots & \frac{1}{2p-1} \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}).$

On pourra se contenter d'une expression comportant un ou plusieurs $\prod(\dots)$.

4.b En déduire la valeur de $u_n = \inf_{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0) \right)^2 dt$.

On exprimera le résultat à l'aide de nombres factoriels.

4.c Quelle est la limite de (u_n) ?