

CONCOURS COMMUN 2005

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

CORRECTION

A- Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ sinon

A-1) $f(0)$ existe et pour $x \neq 0$, $f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0$. Donc,

$$D = [0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

A-2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln(x)} = 0$. Par suite, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = o(x) = f(0) + 0x + o(x)$. f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 et est donc dérivable en 0, et en particulier continue en 0. De plus, $f'(0) = 0$.

A-3) f est de classe C^1 sur $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0, 1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, 1[$ et pour $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$. Quand x tend vers 0, $f'(x) \sim \frac{\ln(x)}{\ln^2(x)} = \frac{1}{\ln(x)} \rightarrow 0 = f'(0)$. Ainsi, f' est continue en 0 ou encore

f est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

A-4) Sur $D \setminus \{0\}$, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) - 1$ et donc f' est strictement négative sur $]0, 1[\cup]1, e[$, strictement positive sur $]e, +\infty[$ et s'annule en e . On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	-	0
f	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

B- Etude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$

B-1) L'étude précédente montre en particulier que f est définie sur $[e, +\infty[$ et que $f([e, +\infty[) \subset [e, +\infty[$. Puisque $v_0 = 3 \in [e, +\infty[$, par récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ existe et $v_n \geq e$.

B-2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a en particulier $v_n > 0$. De plus, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\ln(v_n)} \leq 1$, car $v_n \geq e$ et donc $\ln(v_n) \geq 1$. La suite (v_n) est donc décroissante. Etant minorée par e , la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \in [e, +\infty[$.

B-3) On a vu que f' est positive sur $[e, +\infty[$. D'autre part, pour $x \in [e, +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{1}{x \ln^2 x} + (\ln x - 1) \frac{-2}{x \ln^3 x} = \frac{1}{x \ln^3 x} (\ln x - 2(\ln x - 1)) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

Ainsi, f' est croissante sur $[e, e^2]$ et décroissante sur $[e^2, +\infty[$. Par suite, f' admet sur $[e, +\infty[$, un maximum égal à $f'(e^2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4}$, et finalement

$$\forall x \in [e, +\infty[, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}.$$

B-4) Inégalité des accroissements finis. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $|f'|$ est majorée sur I par un certain réel M . Alors, $\forall (a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

B-5) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est dérivable sur $I = [e, +\infty[$ et $|f'|$ est majorée sur I par $\frac{1}{4}$. De plus, $v_n \in I$ et $e \in I$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|v_{n+1} - e| = |f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|.$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

Pour $n = 0$, on a $|v_0 - e| = 3 - e \leq 1 = \frac{1}{4^0}$ et l'inégalité est vraie quand $n = 0$.

Soit $n \geq 0$. Supposons que $|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$. Alors, $|v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|v_n - e| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$.

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$

B-6) On a $4^5 = 2^{10} = 1024 > 1000$. Par suite, $\frac{1}{4^5} < 10^{-3}$ et donc $\frac{1}{4^{20}} < 10^{-12}$. Mais alors, $|v_{20} - e| < 10^{-12}$.

C- Etude de la fonction g telle que $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln(x)}$

C-1) Sur $D \setminus \{0\}$, g' est du signe de h . h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{(-2x)(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x(x^2 + 1)^2}.$$

h' est strictement positive sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ et donc, h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus $h(1) = 0$ et donc h est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$. Ainsi, g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

C-2) Quand x tend vers 1, $g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x \ln(x)} \sim \frac{2(x-1)}{1(x-1)} = 2$. Par suite,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2.$$

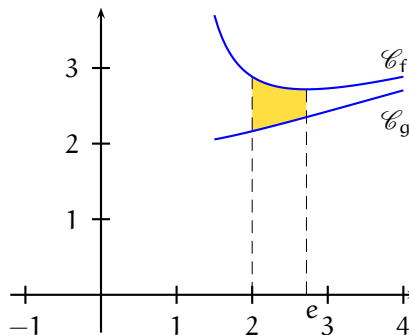
C-3) Soit $x \in D \setminus \{0\}$.

$$f(x) - g(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{x^2 - 1}{x \ln(x)} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x \ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

Cette expression est du signe de $\ln(x)$ et donc $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]1, +\infty[$ et strictement au-dessous sur $]0, 1[$.

Notons $\mathcal{A}$ l'aire à déterminer exprimée en unités d'aire. Sur $[2, e] \subset]1, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ et donc,

$$\mathcal{A} = \int_2^e (f(x) - g(x)) \, dx = \int_2^e \frac{1}{x \ln(x)} \, dx = [\ln |\ln(x)|]_2^e = -\ln(\ln 2) = \ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right).$$



E- Solutions d'une équation différentielle

E-1) Puisque y ne s'annule pas sur K , y est dérivable sur K si et seulement si z est dérivable sur K . De plus,

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow \forall x \in K, -x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in K, -x^2 \left(\frac{-y'(x)}{y^2(x)} \right) + x \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{y^2(x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in K, x^2 y'(x) + xy(x) = 1 \quad (E_2).\end{aligned}$$

E-2) Soit f une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E_2) \text{ sur }]1, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[, x^2 f'(x) + xf(x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[, xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[, (xf)'(x) = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in]1, +\infty[, xf(x) = \ln(x) + C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{\ln(x) + C}{x} \\ &\Leftrightarrow \exists a \in]0, +\infty[/ \forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{\ln(x) + \ln(a)}{x} \Leftrightarrow \exists a \in]0, +\infty[/ \forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}.\end{aligned}$$

(on a posé $a = e^C$ ou encore $C = \ln(a)$).

Les solutions de (E_2) sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}$, $a \in]0, +\infty[$.

Pour $x > 1$ et $a > 1$, on a $ax > 1$ et donc $\ln(ax) > 0$. Par suite, g_a ne s'annule pas sur K .

E-3) Soit $a > 0$ et $x \in]0, \frac{1}{a}[\cup \frac{1}{a}, +\infty[$.

$$(x, y) \in (C_a) \Leftrightarrow y = \frac{x}{\ln(ax)} \Leftrightarrow ay = \frac{ax}{\ln(ax)} \Leftrightarrow (ax, ay) \in C_1 \Leftrightarrow \text{hom}_{0,a}((x, y)) \in (C_1).$$

Ainsi, $\text{hom}_{0,a}((C_a)) = (C_1)$ ou encore $\text{hom}_{0,1/a}((C_1)) = (C_a)$.

(C_a) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{a}$.

F- Etude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

F-1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, f n'est pas définie sur $[x, 0[$ et $H(x)$ n'a aucun sens.
- $H(0)$ n'existe pas.
- Si $x \in]0, 1[$, f est continue sur $[0, x]$ et donc $\int_0^x f(t) dt$ existe puis, $H(x)$ existe.
- Si $x \geq 1$, f n'est pas définie en $1 \in [0, x]$ et $H(x)$ n'est pas défini.

Finalement,

$$D_H =]0, 1[.$$

F-2) Pour $x \in [0, 1[$, posons $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. f est continue sur $[0, 1[$. Par suite, F est définie et dérivable sur $[0, 1[$ et $F' = f$. Or, pour $x \in]0, 1[$,

$$H(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Ce dernier rapport tend vers $F'(0) = f(0) = 0$ et donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0.$$

F-3) On sait que $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ et donc $\exists a \in]0, 1[$ tel que, pour tout x de $[a, 1[$, $\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x)}{x-1} \leq \frac{3}{2}$, ou encore (puisque $x-1 < 0$), $\frac{3}{2}(x-1) \leq \ln(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$.

Soit $x \in [a, 1[$. Pour $t \in [a, x]$, on a $\frac{3}{2}(t-1) \leq \ln(t) \leq \frac{1}{2}(t-1)$, et donc, par décroissance de la fonction $X \mapsto \frac{1}{X}$ sur $] -\infty, 0[$, $\frac{2}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{2}{3(t-1)}$ et enfin, $\frac{2t}{t-1} \leq \frac{t}{\ln(t)} \leq \frac{2t}{3(t-1)}$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient alors $2 \int_a^x \frac{t}{t-1} dt \leq \int_a^x \frac{t}{\ln(t)} dt \leq \frac{2}{3} \int_a^x \frac{t}{t-1} dt$. Maintenant,

$$\int_a^x \frac{t}{t-1} dt = \int_a^x \frac{t-1+1}{t-1} dt = (x-a) + \ln \left| \frac{x-1}{a-1} \right|.$$

Ainsi, quand x tend vers 1, $\frac{2}{3} \int_a^x \frac{t}{t-1} dt = (x-a) + \ln \left| \frac{x-1}{a-1} \right|$ tend vers $-\infty$. Il en est de même de $\int_a^x \frac{t}{\ln(t)} dt$, puis de $\int_0^x \frac{t}{\ln(t)} dt = \int_0^a \frac{t}{\ln(t)} dt + \int_a^x \frac{t}{\ln(t)} dt$.

Comme d'autre part, $\frac{1}{x}$ tend vers 1, on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow 1} H(x) = -\infty.$$

FIN

