

CONCOURS COMMUN 1997

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

EXTRAIT

DEUXIÈME PROBLÈME

F est l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Questions préliminaires :

Soit ψ l'application, définie sur F , qui, à une fonction f , associe sa dérivée f' :

- a) Montrer que ψ est un endomorphisme de F .
- b) Est-ce un automorphisme ?

On considère le sous-ensemble E de F des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x) \sin x + Q(x) \cos x$$

où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ (c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à 1 et à coefficients réels).

- 1 - Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F , de base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ où $f_1 : x \mapsto \sin x$; $f_2 : x \mapsto x \sin x$; $f_3 : x \mapsto \cos x$; $f_4 : x \mapsto x \cos x$.
- 2 - D est la restriction de ψ à E .
 - a) Montrer que D est un endomorphisme de E et donner sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
 - b) Déterminer $\text{Ker}(D)$. En déduire que D est une bijection de E sur E .
- 3 - λ est un réel, Id_E est l'application identique de E .
 - a) Déterminer, selon les valeurs de λ , le rang de $D^2 - \lambda \text{Id}_E$.
 - b) Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + \text{Id}_E$.
 - c) En déduire que $D^4 + 2D^2 + \text{Id}_E$ est l'application nulle de E .
 - d) Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D .
- 4 - On note V le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2 .
 - a) Vérifier que V est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
 - b) Soit G l'ensemble des éléments inversibles de V .
Montrer que G est l'ensemble des éléments de la forme : $\alpha \text{Id}_E + \beta D^2$ où $\alpha \neq 0$.
 - c) G constitue-t-il un groupe pour la loi de composition des applications ?

5 - a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.

b) Déterminer le noyau de $\psi^2 + \text{Id}_F$.

c) Montrer que le noyau de $(\psi^2 + \text{Id}_F)^2$ est E . Puis montrer que E est exactement l'espace des solutions de l'équation différentielle :

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$

FIN EXTRAIT

