Épreuve de mathématiques II
Correction

Partie I
Étude de quelques propriétés de l'application trace

1. (a) $\forall A, B \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{tr}(A+\lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$, donc l'application tr est linéaire.

(b) Posons $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $C = AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. On a

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \operatorname{tr}(BA).$$

D'autre part, il est clair que $\operatorname{tr}({}^tA) = \operatorname{tr}(A)$, donc $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}\left({}^t(AB)\right) = \operatorname{tr}\left({}^tB{}^tA\right) = \operatorname{tr}({}^tA{}^tB)$. D'où l'égalité demandée.

(c) tr est une forme linéaire non nulle puisque $\operatorname{tr}(I_n) = n \neq 0$, donc $\ker(\operatorname{tr})$ est un hyperplan de E, d'où :

$$\dim\ker\operatorname{tr} = \dim E - 1 = n^2 - 1.$$

(d) $I_n \notin \ker(\operatorname{tr})$, donc $\ker(\operatorname{tr})$ et $\operatorname{Vect}(I_n)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E, d'où :

$$E = \ker(\operatorname{tr}) \oplus \operatorname{Vect}(I_n).$$

(e) Les matrices élémentaires E_{ij} avec $i \neq j$ sont toutes éléments de $\ker(\operatorname{tr})$ et par combinaison linéaire la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à $\ker(\operatorname{tr})$. M est inversible, car par exemple égale à la matrice de passage de la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $(e_n, e_1, ..., e_{n-1})$.

2. (a) Il est clair que φ est un endomorphisme de E, de plus si $\varphi(M) = 0$, alors $M = -\operatorname{tr}(M)I_n$ donc $m_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $\forall i, m_{ii} = -\operatorname{tr}(M)$, d'où $\operatorname{tr}(M) = -n\operatorname{tr}(M)$ ou encore $\operatorname{tr}(M) = 0 = m_{ii}$ et ceci pour tout i.
Finalement $M = 0$ et par conséquent φ est endomorphisme injectif, donc est un automorphisme de E.

(b) i. $\varphi(M) = M$ si, et seulement si, $\operatorname{tr}(M) = 0$, donc $E_1(\varphi) = \ker(\operatorname{tr})$.

ii. $\varphi(M) = (n+1)M$ si, et seulement si, $\operatorname{tr}(M)I_n = nM$ ou encore $M = \dfrac{\operatorname{tr} M}{n} I_n$ donc $m_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $m_{ii} = \dfrac{\operatorname{tr} M}{n}$, donc nécessairement $m_{11} = m_{22} = ... = m_{nn}$ pour tout i. D'où $M = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $E_{n+1}(\varphi) \subset \operatorname{Vect}(I_n)$. L'inclusion réciproque est évidente. D'où $E_{n+1}(\varphi) = \operatorname{Vect}(I_n)$.

iii. D'après les deux questions précédentes 1 et $n+1$ sont des valeurs propres de φ dont les sous-espaces propres sont $E_1(\varphi)$ et $E_{n+1}(\varphi)$ et comme $E_1(\varphi) = \ker(\operatorname{tr})$ et $E_{n+1}(\varphi) = \operatorname{Vect}(I_n)$, alors les sous-espaces propres sont supplémentaires (la question 1. d) de la partie I), donc φ est diagonalisable.

3. (a) Pour tout $M \in E$, on a :

$$\psi^2(M) = \psi(M) + \operatorname{tr}(M)\psi(J) = M + \operatorname{tr}(M)J + \operatorname{tr}(M)J + \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(J)J = \psi(M) + \operatorname{tr}(M)J = 2\psi(M) - M,$$

donc $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de ψ.

(b) Puisque $\psi \neq Id_E$, le polynôme annulateur $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ est le polynôme minimal de ψ. Donc 1 est l'unique valeur propre de ψ.

(c) C'est un résultat du cours : le polynôme minimal de ψ admet une racine double, donc ψ n'est pas diagonalisable.

Partie II
Un premier résultat préliminaire

1. Il est clair que v est linéaire, de plus si $x \in F_1$ tel que $v(x) = 0$, alors $u(x) = 0$, donc $x \in \ker u \cap F_1 = \{0\}$, donc $x = 0$. D'autre part $\dim F_1 = \dim Im(u)$, donc v est un isomorphisme.

2. (a) Puisque v est un isomorphisme la famille $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$ est une base de $Im(u)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $(\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n)$ telle que la famille $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_m)$ soit une base de G.

(b) Relativement aux bases précédentes, la matrice de u est de la forme :

$$\operatorname{Mat}_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M. D'après ce qui précède il existe une base B de $\mathbb{R}^p$ et une base C de $\mathbb{R}^m$ telles que

$$\operatorname{Mat}_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Désignons par S la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ à la base B et T la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ à la base C, alors S et T sont inversibles et on a la formule de changement de bases $M = S\operatorname{Mat}_{B,C}(u)T^{-1} = SJ_{m,p,r}T^{-1}$.

4. • Si $0 < r = p < m$, $J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$.
• Si $0 < r = m < p$, $J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}$.
• Si $0 < r = p = m$, $J_{m,p,r} = I_r$.

Partie III
Un deuxième résultat préliminaire

1. Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ des scalaires réels tels que $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i l_i^* = 0$, donc $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $0 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i l_i^*(l_j) = \lambda_j$, donc la famille $(l_1^*, l_2^*, ..., l_s^*)$ est libre.

2. Par linéarité, $\forall k \in [\![1, s]\!]$, $l_k(x) = l_k^* \left(\sum_{j=1}^{s} x_j l_j \right) = \sum_{j=1}^{s} x_j l_k^*(l_j) = x_k$.

3. Soit l une forme linéaire et $x = \sum_{i=1}^{s} x_i l_i$ un élément de L. On a :

$$l(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i l(l_i) = \sum_{i=1}^{s} l_i^*(x) l(l_i) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i l_i^*(x)$$

en posant $\alpha_i = l(l_i)$. Nous voyons donc que les s formes linéaires $l_1^*, l_2^*, ..., l_s^*$ engendrent L^* et comme elles sont libres, ces formes linéaires décrivent une base de L^*.

4. D'après ce qui précède, $L^* = \mathrm{Vect}(l_1^*, l_2^*, ..., l_s^*)$, d'où $\dim L^* = s = \dim L$.

Partie IV
Une caractérisation d'une forme linéaire sur E

1. L'application ϕ_A est clairement linéaire, c'est une conséquence de la linéarité de l'application trace..

2. (a) Soient A et B de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $M \in E$, on a :

$$h(A + \lambda B)(M) = \mathrm{tr}((A + \lambda B)M) = \mathrm{tr}(AM) + \lambda \,\mathrm{tr}(BM) = h(A)(M) + \lambda h(B)(M).$$

Donc h est bien linéaire.

(b) i. On vérifie facilement que $\phi_A(E_{ij}) = a_{ji}$.

ii. Si $h(A) = 0$, alors, en particulier $\phi_A(E_{ij}) = a_{ji} = 0$ et ceci pour tout (i, j), donc $A = 0$ et par conséquent h est injective.

(c) Les espaces $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ sont de même dimension finie. Donc l'injectivité de h est équivalente à la bijectivité.

Partie V
Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible

1. Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \ker\varphi$. Il suffit donc de montrer que les deux sous-espaces H et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires puisque la somme des dimensions est égale celle de E. Soit $M \in H \cap \mathrm{Vect}(A)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda A$ et $\varphi(M) = 0$. D'où $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A) = 0$, comme $\varphi(A) \neq 0$, donc $\lambda = 0$ et par conséquent $M = 0$.

2. Il existe une matrice B telle que pour toute matrice M, on ait $\varphi(M) = \mathrm{tr}(BM) = \phi_B(M)$ (d'après la question 2.c) de la partie IV). Donc $H = \ker\varphi = \ker(\phi_B)$.

3. (a) P_1 est inversible, c'est la matrice de passage de la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $(e_2, e_3, ..., e_n, e_1)$.

(b) On vérifie facilement que $\mathrm{tr}(R_r P_1) = 0$ ($R_r P_1$ a sa diagonale nulle).

4. B est équivalente à R_r : $PBQ = R_r$, où P et Q sont inversibles. On a donc, pour toute matrice M,

$$\mathrm{tr}(BM) = \mathrm{tr}(P^{-1} R_r Q^{-1} M) = \mathrm{tr}(R_r QMP).$$

Si on trouve Y inversible telle que $\mathrm{tr}(R_r Y)$ soit de trace nulle, on a gagné (on pose $M = Q^{-1} Y P^{-1}$ qui reste à la fois dans $GL_n(\mathbb{R})$ et dans l'hyperplan H). Pour cela, on peut par exemple poser $Y = P_1$.

Partie VI
Tout hyperplan de E contient au moins une matrice orthogonale

1. (a) Posons $C = {}^tAB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj}$. D'où $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj}$.

(b) Soit H un hyperplan de E, donc il existe une matrice B telle que $H = \ker(\phi_B)$, donc il suffit de prendre $Y = {}^tB$.

(c) On peut vérifier facilement que $\forall P_1, P_2 \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\theta_N(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\theta_N(P_1) + \theta_N(P_2),$$

et

$$\theta_N(P_1P_2) = \theta_N(P_1)\theta_N(P_2),$$

de plus

$$\theta_N(I_n) = {}^tNI_nN = I_n.$$

Enfin, $\theta_N(P) = {}^tNPN = 0$ si, et seulement si, $P = 0$, car N est inversible.
En conclusion, θ_N est un automorphisme d'algèbres.

(d) On a, pour tout $P \in E$, $\theta_{N_1} \circ \theta_{N_2}(P) = \theta_{N_1}({}^tN_2PN_2) = {}^tN_1({}^tN_2PN_2)N_1 = {}^t(N_2N_1)P(N_2N_1) = \theta_{N_2N_1}(P)$ donc $\theta_{N_1} \circ \theta_{N_2} = \theta_{N_2N_1}$. En particulier, $\theta_{N_1} \circ \theta_{{}^tN_1} = \theta_{{}^tN_1N_1} = \theta_{I_n} = Id_E$, donc $(\theta_{N_1})^{-1} = \theta_{{}^tN_1}$.

2. Soit P une matrice orthogonale. On a :

$$\begin{aligned}(\theta_N(P))^{-1} &= ({}^tNPN)^{-1}\\ &= {}^tNP^{-1}N\\ &= {}^tN{}^tPN\\ &= {}^t(\theta_N(P))\end{aligned}$$

et donc $\theta_N(P)$ est orthogonale. De plus $\theta_N(P) = P'$ est équivalent à $\theta_{{}^tN}(P') = P$, il en résulte que θ_N est une bijection de $\mathscr{O}_n$ sur lui-même .

3. Soit P une matrice symétrique. On a :

$$\begin{aligned}{}^t(\theta_N(P)) &= {}^t({}^tNPN)\\ &= {}^tN{}^tPN\\ &= {}^tNPN\\ &= \theta_N(P)\end{aligned}$$

et donc $\theta_N(P)$ est symétrique. De plus $\theta_N(P) = P'$ est équivalent à $\theta_{{}^tN}(P') = P$, il en résulte que θ_N est une bijection de $\mathscr{S}_n$ sur lui-même .

4. On a

$$\begin{aligned}(\theta_N(Y)|\theta_N(P)) &= \mathrm{tr}({}^t({}^tNYN)({}^tNPN))\\ &= \mathrm{tr}({}^tN{}^tYN{}^tNPN)\\ &= \mathrm{tr}({}^tN{}^tYPN)\\ &= \mathrm{tr}({}^tYP)\\ &= (Y|P)\end{aligned}$$

Donc $(\theta_N(Y)|\theta_N(P)) = 0$ si, et seulement si, $(Y|P) = 0$, c'est-à-dire $P \in \mathscr{H}_Y$ si, et seulement si, $\theta_N(P) \in \mathscr{H}_{\theta_N(Y)}$.

5. (a) Soit $M \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n$. Puisque M est symétrique, on a les égalités :

$$(Y|M) = ({}^tY|{}^tM) = ({}^tY|M)$$

Donc, si $M \in \mathscr{H}_Y$, les produits scalaires $(Y|M)$ et $({}^tY|M)$ sont nuls. Il en résulte que $\left(\frac{1}{2}(Y + {}^tY)|M\right) = 0$, on en déduit que $M \in \mathscr{H}_{Y_s}$.
Réciproquement, si $M \in \mathscr{H}_{Y_s}$, alors $\left(\frac{1}{2}(Y + {}^tY)|M\right) = 0$, donc

$$(Y|M) = -({}^tY|M)$$

et puisque M est symétrique,

$$(Y|M) = -({}^tY|{}^tM)$$

ou encore

$$(Y|M) = -(Y|M).$$

On en déduit que $(Y|M) = 0$, et que $M \in \mathscr{H}_Y$.
On conclusion, on a l'égalité :

$$\mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_Y = \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_{Y_s}.$$

(b) La matrice Y_s étant symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral), autrement dit il existe une matrice orthogonale U telle que ${}^tUY_sU = \theta_U(Y_s) = Y'$ soit diagonale.

(c) Il est clair que Q est orthogonale et symétrique, de plus $(Q|Y') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(Q)_{ij}(Y')_{ij} = 0$ (les deux diagonales de Q et de Y' ne se coupent pas, car n est pair), donc

$$Q \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_{Y'}.$$

(d) On a $Q \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_{\theta_U(Y_s)}$, donc

$$0 = ({}^tUY_sU|Q) = (Y_s|UQ{}^tU)$$

et par conséquent $UQ{}^tU \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_{Y_s} = \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_Y$, c'est-à-dire $\theta_{{}^tU}(Q) \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_Y$.

(e) La matrice $\theta_{{}^tU}(Q)$ répond à la question.

(a) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à Y (Y donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Donc, si U est une matrice orthogonale, $\theta_U(Y)$ est la matrice de f dans une autre base orthonormée. Donc pour trouver une telle matrice U il suffit de faire un changement des éléments de la base en permutant les vecteurs de la base de tel manière à avoir

$$|d_{1,1} \leq |d_{2,2}| \leq ... \leq |d_{n,n}|.$$

(b) Si $d_{n,n} = 0$, alors tous les éléments diagonaux de U sont nuls, dans ce cas on peut prendre la matrice I_n qui est orthogonale.

(c) i. On a

$${}^tP_\alpha P_\alpha = \begin{pmatrix} {}^tP' & 0 \\ 0 & {}^tA_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & A_\alpha \end{pmatrix} = I_n.$$

Donc P_α est orthogonale.

ii.

$$
\begin{aligned}
(P_\alpha|D) &= \sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^k\varepsilon_k d_{kk} + (\varepsilon_{2p}d_{2p,2p}+\varepsilon_{2p+1}d_{2p+1,2p+1})\cos\alpha \\
&\quad +(\varepsilon_{2p+1}d_{2p+1,2p}-\varepsilon_{2p}d_{2p,2p+1})\sin\alpha \\
&= \sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^k|d_{kk}| + (|d_{2p,2p}|+|d_{2p+1,2p+1}|)\cos\alpha \\
&\quad +(\varepsilon_{2p+1}d_{2p+1,2p}-\varepsilon_{2p}d_{2p,2p+1})\sin\alpha
\end{aligned}
$$

Il suffit donc de prendre $a = |d_{2p,2p}| + |d_{2p+1,2p+1}| > 0$, $b = \varepsilon_{2p+1}d_{2p+1,2p} - \varepsilon_{2p}d_{2p,2p+1}$ et $c = \sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^k|d_{kk}|$.

iii. Si $|c| \leq a$, alors nécessairement $|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}$, et donc l'équation $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en α admet des solutions dans $\mathbb{R}$.

iv. Montrons la propriété par récurrence sur p. Pour $p=1$, l'inégalité devient

$$a_1 \leq a_2 + a_3$$

ce qui est bien vérifie, car $(a_n)_n$ est positive et croissante. Supposons la propriété vraie à l'ordre p. Alors

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^{k-1}a_k &= \sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{k-1}a_k - a_{2p} + a_{2p+1} \\
&\leq a_{2p} + a_{2p+1} - a_{2p} + a_{2p+1} \\
&\leq 2a_{2p+1} \\
&\leq a_{2p+2} + a_{2p+3}
\end{aligned}
$$

donc l'inégalité est vraie à l'ordre $p+1$. Elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

v. D'après la question iii.

$$|c| = \sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^k|d_{kk}| \leq |d_{2p,2p}| + |d_{2p+1,2p+1}| = |a|$$

donc la condition d'existence de α_0 est assurée. D'où $(P_{\alpha_0}|D) = 0$.

vi. On a $P_{\alpha_0} \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{H}_D$, et comme $D = \theta_U(Y)$, alors $\theta_{{}^tU}(P_{\alpha_0}) \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{H}_Y$.

vii. Si $\det(\theta_{{}^tU}(P_{\alpha_0})) = -1$, alors $\det(-\theta_{{}^tU}(P_{\alpha_0})) = 1$ (n est impair), et donc une des deux matrices $\theta_{{}^tU}(P_{\alpha_0}))$ ou $\theta_{{}^tU}(P_{\alpha_0}))$ est dans $\mathscr{H}_Y$ et positive.

• • • • • • • • •