PROBABILITES

Partie 3

Exercice 1

Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de tailles n et m et de même paramètre p.

On considère la var :

$$Z = X + Y$$

1) En considérant le coefficient de X^ℓ dans le développement des deux membres de l'identité

$$(1+X)^{n+m} = (1+X)^n(1+X)^m$$

montrer que :

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k}\binom{m}{\ell-k} = \binom{n+m}{\ell}$$

2) En déduire que La variable aléatoire Z suit une loi binomiale de taille $n+m$ et de paramètre p.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?

Indice :

Supposer que X et Y suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$, puis montrer que

$$P(X+Y=2 \cap X-Y=0) \neq P(X+Y=2)P(X-Y=0)$$

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires prenant pour valeurs $a_1, \ldots, a_n$ avec

$$P(X=a_i) = P(Y=a_i) = p_i$$

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1) Que vaut la somme $\sum_{i=1}^{n} p_i$?

2) Montrer que

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)$$

Indice :

L'événement $\{X = Y\}$ se décompose desévénements disjoints $\{X = a_i \cap Y = a_i\}$.

Exercice 4

Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante.

Montrer que

$$\forall a > 0, P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

Indice : Appliquer l'inégalité de Markov.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de taille n et de paramètre p
.
Montrer que pour tout $\lambda, \varepsilon > 0$

$$P(X - np \geqslant n\varepsilon) \leqslant E(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon))$$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$P(X = k) = a \binom{n}{k}$$

1) Que vaut a ?
2) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0, 1[$.

Calculer l'espérance de la variable
$$Y = \frac{1}{X + 1}$$

Exercice 8

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.