

Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2000 - Filière MPSI - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : équation fonctionnelle, intégration, équation différentielle, densité, continuité, trace, hyperplan, matrice, théorème du rang, dimension

Commentaires : Problème plutôt facile, surtout pour la filière MPSI. Les questions sont très détaillées. A titre d'exemple, le résultat démontré par le problème d'algèbre fait parfois l'objet d'une question d'oral à l'X. Mais il n'y a aucune question intermédiaire!

Analyse

Partie I

1. C'est évident si on admet les formules de trigonométrie, notamment celles donnant $\cos(x+y)$ et $\cos(x-y)$.
2. Cf votre cours de sup!
3. Remarquons d'abord que f_α est continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tous x et y de $\mathbb{R}$, on a :

$$f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) = f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) = 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2f_\alpha(x)f_\alpha(y).$$

Ceci achève de prouver que f_α est aussi dans $\mathcal{E}$.

4. a. En faisant $x=0$ et $y=0$, on trouve $f(0)^2 = f(0)$, et donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
b. On fait $y=0$, et on trouve $2f(x) = 2f(x) \times 0 = 0$, et donc f est la fonction identiquement nulle.
c. On fait $x=0$, et y parcourt l'ensemble des réels. Alors :

$$f(y) + f(-y) = 2f(y) \implies f(y) = f(-y),$$

et donc f est paire.

Partie II

- A.1.** a. Le changement de variables $u = x+y$ donne :

$$\int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du.$$

- b. On intègre l'égalité vérifiée par f entre 0 et r , par rapport à la variable y . On trouve :

$$\begin{aligned} 2f(x) \int_0^r f(y)dy &= \int_0^r f(x+y)dy + \int_0^r f(x-y)dy \\ &= \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(v)dv \end{aligned}$$

(la deuxième intégrale est transformée par le changement de variable $v = x-y$).

- A.2.** a. Comme f est continue, et que $f(0) = 1$, il existe $r > 0$ tel que, pour x dans $[0, r]$, on ait $f(x) \geq 1/2$. Alors,

$$\int_0^r f(y)dy \geq r/2 > 0.$$

- b. D'après **A.1.b.**, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2 \int_0^r f(y)dy} \left(\int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(v)dv \right).$$

Or, par le théorème fondamental du calcul intégral,

$$x \mapsto \int_x^{x+r} f(u)du \text{ et } x \mapsto \int_{x-r}^x f(v)dv$$

sont C^1 . Il en est de même de f .

- c. Il suffit de procéder par récurrence à partir de la formule précédente. Nous avons en effet prouvé que f est C^0 , C^1 , et si on suppose que f est C^n , alors

$$x \mapsto \int_x^{x+r} f(u)du \text{ et } x \mapsto \int_{x-r}^x f(v)dv$$

sont C^{n+1} , et il en est de même de f !

- d. On dérive la formule obtenue en **A.1.b.** :

$$f'(x) = \frac{1}{2 \int_0^r f(y)dy} (f(x+r) - f(x) + f(x) - f(x-r)),$$

d'où le résultat demandé en utilisant l'équation vérifiée par f .

- A.3.** Nous dérivons la formule précédente :

$$c^2 f''(x) = cf'(x+r) - cf'(x-r).$$

Puis on réapplique cette formule, avec $f'(x+r)$ et $f'(x-r)$:

$$\begin{aligned} c^2 f''(x) &= f(x+2r) - f(x) - f(x) + f(x-2r) \\ &= f(x+2r) + f(x-2r) - 2f(x) \\ &= 2f(x)f(2r) - 2f(x) \end{aligned}$$

la dernière égalité étant conséquence de l'équation vérifiée par f . On a donc le résultat, en posant $\lambda = \frac{2f(2r) - 2}{c^2}$.

- B.1.** C'est du cours!

- Si $\mu = 0$, $y(x) = Ax + B$, A et B étant des constantes.
- Si $\mu > 0$, $y(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$.
- Si $\mu < 0$, $y(x) = A \cos(\sqrt{-\mu}x) + B \sin(\sqrt{-\mu}x)$.

- B.2.** En vertu de **I.4.c.**, nous ne gardons que les fonctions paires parmi les précédentes. En outre, si f n'est pas la fonction nulle, $f(0) = 1$, et les coefficients devant les termes en cosinus et en cosinus hyperbolique sont donc égaux à 1. Finalement, nous pouvons conclure que les éléments de $\mathcal{E}$ sont :

- Les fonctions constantes identiquement égales à 0 ou 1.
- Les fonctions $\cos(\alpha x)$.
- Les fonctions $\cosh(\alpha x)$.

- B.3.** Pour déterminer $\mathcal{F}$, il convient de retirer les constantes, et les cosinus hyperboliques, qui ne s'annulent pas. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont donc les fonctions $\cos(\alpha x)$, où α est un réel non nul!

Partie III

- A.1.** D'après **I.4.**, $f(0) = 1$. En outre, comme tout élément de $\mathcal{F}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, et que f est paire, f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
- A.2** E est une partie non vide (cf ci-dessus) minorée (par 0) de $\mathbb{R}$: elle admet donc une borne inférieure, $a \geq 0$.
- A.3.** Le raisonnement par l'absurde n'est pas obligatoire! Pour $n \in \mathbb{N}$, par définition de la borne supérieure, il existe u_n dans E avec $a \leq u_n \leq a + \frac{1}{n+1}$. La suite (u_n) converge donc vers a , et $f(u_n) = 0$. Le critère séquentiel de la continuité (f est continue en a), nous dit alors que $f(a) = 0$. Comme $a \geq 0$, et que $f(0) = 1$, alors $a > 0$.
- A.4.** S'il existe b dans $]0, a[$ avec $f(b) \leq 0$, alors le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue) nous dit qu'il existe c dans $]0, a[$ avec $f(c) = 0$. Alors $c \in E$, et $c < a$: ceci contredit la définition de la borne inférieure.
- B.1.a.** On applique la relation vérifiée par $\mathcal{F}$ avec $x = y = \frac{a}{2^{q+1}}$.
- B.1.b.** Le résultat est vrai pour $q = 0$: $f(a) = g(a) = 0$. S'il est vrai à l'ordre q , alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 \right)^{1/2} \\ &= g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right), \end{aligned}$$

car g vérifie la même relation que f donnée en **II.B.1.a.** (remarquons qu'il est possible de prendre les racines carrées car les fonctions considérées sont positives dans $[0, a]$).

- B.2.** Si x est dans D_a , positif, le fait admis prouve que $f(x) = g(x)$. Si x est négatif, la parité des deux fonctions permet de conclure.
- B.3.** f et g coïncident sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ et sont continues : elles sont donc égales sur $\mathbb{R}$. Précisément, si $x \in \mathbb{R}$, soit (u_n) une suite de D_a qui converge vers x . Alors, pour chaque n , $f(u_n) = g(u_n)$, et le passage à la limite donne $f(x) = g(x)$.
- C.** Les éléments de $\mathcal{F}$ sont donc toutes les fonctions $\cos(\omega x)$, où ω est un réel non nul.

FIN

