

Nombres Complexes

Résumé Lacunaire

I) Rappels et Compléments

Tous les nombres qu'on rencontrera sont des nombres complexes.

$$\rightsquigarrow \overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k}$$

$$\rightsquigarrow \overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \overline{z_k}$$

$$\rightsquigarrow \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \text{ et } \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$$

$$\rightsquigarrow |z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$$

$$\rightsquigarrow z = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0)$$

$$\rightsquigarrow z \times \bar{z} = |z|^2$$

$$\rightsquigarrow \forall z \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} \operatorname{Re}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n z_k\right) =$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n z_k\right) =$$

$$\rightsquigarrow y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{y} =$$

$$\rightsquigarrow y \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{y} =$$

$$\rightsquigarrow |y| = 0 \Leftrightarrow y =$$

$$\rightsquigarrow |z| \quad | -z | \quad | \bar{z} |$$

$$\rightsquigarrow \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k \right| =$$

$$\rightsquigarrow |z + z'| \quad |z| + |z'|$$

$$\rightsquigarrow \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \leq |z - z'| \leq$$

$$\rightsquigarrow e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$\rightsquigarrow \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta) \end{cases}$$

(Formules d'Euler)

$$\rightsquigarrow \arg(e^{i\theta}) = \theta$$

$$\rightsquigarrow \forall k \in \mathbb{Z}, e^{2k\pi i} = 1$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \\ \text{Càd} \\ (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \end{cases}$$

(Formules de Moivre)

$$\rightsquigarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \\ \sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) \end{cases}$$

→ écriture exponentielle d'un complexe non nul.

$$z = r e^{i\theta}$$

où $r =$ et $\theta \in [2\pi]$

$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \}$$

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |z| = 1$$

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \bar{z} = z^{-1}$$

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow (\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta})$$

(Règle de l'angle - moitié)

$$e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{i\theta} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2 \cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \theta'}{2}}$$

$$e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \theta'}{2}}$$

(Formules d'addition)

$$\cos \theta + \cos \theta' = 2 \cos \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta + \theta'}{2} \right)$$

$$\sin \theta + \sin \theta' = 2 \sin \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta + \theta'}{2} \right)$$

$$\cos \theta - \cos \theta' = -2 \sin \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta + \theta'}{2} \right)$$

$$\sin \theta - \sin \theta' = 2 \cos \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta + \theta'}{2} \right)$$

Linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$

Linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ c'est les écrire comme combinaison linéaire de termes de la forme $\cos kx$ ou $\sin kx$, où $k \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre

On remplace $\cos x$ par $e^{ix} + e^{-ix}$ et $\sin x$ par $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ puis on développe via le binôme de Newton. On simplifie, puis on conclut enfin via Euler.

Exponentielle d'un nombre complexe

Définition

Pour $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$. On a :

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i \operatorname{Im}(z)}$$

Prop

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- 1) $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$
- 2) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$ (car $e^z \in \mathbb{C}^*$)
- 3) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$

II) Racine Carrée d'un nombre complexe

1) Définition et exemples

Prop

Soient $a, z \in \mathbb{C}$.

z est dite racine Carrée de a si et seulement si :

$$z^2 = a$$

2) Détermination pratique des racines Carrées

Soit $a = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}^*$.

Voici comment déterminer des racines Carrées.

On procède de la manière suivante (à retenir).

Soit $z = x + yi \in \mathbb{C}$. On a :

$$z^2 = a \Leftrightarrow (x + iy)^2 = a + \beta i$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = a + \beta i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2y\beta + a} \right) & (\text{par sommation}) \\ y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2y\beta - a} \right) & (\text{par soustraction}) \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\dots} \\ y = \sqrt{\dots} \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

x a 2 valeurs possibles, et y aussi.

Alors $z = x + yi$ a 4 valeurs possibles.

Mais $xy = \frac{\beta}{2}$ indique si $xy \geq 0$ ou $xy \leq 0$.

De plus, on saura si x et y ont le même signe ou deux signes contraires.

Enfin, $z = x + yi$ aura deux valeurs uniquement.

III) Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$

$$\text{Ici } (E) : az^2 + bz + c = 0$$

$$\text{où } (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

On verra comment résoudre l'équation (E) de second degré à coefficients complexes.

Notation

1) $\Delta = b^2 - 4ac$; le discriminant de (E).

2) δ désigne une racine carrée complexe de Δ .

On a :

Prop

1) Si $\Delta \neq 0$

(E) possède deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

2) Si $\Delta = 0$

(E) possède une unique solution complexe :

$$z_1 = \frac{-b}{2a}$$

IV) Racines nèmes d'un nombre complexe

1) Généralités

Déf 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Soient z et $a \in \mathbb{C}$.

On dit que z est une racine nème de a si et seulement si $z^n = a$.

NB:

1) Pour $n=2$, on parle de racine carrée.

2) Pour $n=3$, on parle de racine cubique.

Notation et vocabulaire

1) Une racine nème de 1 s'appelle racine nème de l'unité.

2) ω_n désignera l'ensemble des racines nèmes de l'unité.

À retenir

$$1) \mathbb{L}_n = \{ z \in \mathbb{C} / z^n = 1 \}$$

$$\mathbb{L} = \{ z \in \mathbb{C} / z = 1 \}$$

$$2) z \in \mathbb{L}_n \Leftrightarrow z^n = 1$$

$$z \in \mathbb{L} \Leftrightarrow z = 1$$

$$3) \mathbb{L}_n \supset \mathbb{L}$$

2) Les racines nèmes de l'unité

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$1) \mathbb{L}_n = \{ e^{2\pi i k / n} / k \in \mathbb{Z} \}$$

$$2) \mathbb{L}_n = \{ e^{2\pi i k / n} / 0 \leq k \leq n-1 \}$$

$$3) \mathbb{L}_n = \{ e^{2\pi i k / n} / 1 \leq k \leq n-1 \}$$

Prop

Soit $n \geq 2$.

La somme de toutes les racines nèmes de l'unité est 0

Notation

$$j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

Prop

$$1) j^3 = 1$$

$$2) j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

3) $\omega_3 = \{1, j, j^2\}$ les 3 racines cubiques de l'unité.

$$4) 1 + j + j^2 = 0$$

$$5) j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$$

Prop

Soit $n \geq 3$.

Les racines n ème de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier.

3) Racines nèmes d'un complexe non nul

Prop

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.

Posons $a = r e^{i\theta}$, son écriture exponentielle.

Les racines nèmes de a sont les complexes de la forme :

$$\sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \text{où } 0 \leq k \leq n-1$$

Fin