Matrices et Applications Linéaires

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de l'application linéaire f relativement aux bases canoniques :

1) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y, x) \end{array} \right.$

2) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & (X+1)P - X^2P' \end{array} \right.$

3) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(1), P''(2)) \end{array} \right.$

Exercice 2

Considérons l'application f définie par $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z,y,x) \end{array} \right.$.

B_c est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B = (u_1, u_2, u_3)$, où $\left\{ \begin{array}{lcl} u_1 & = & (1,0,1) \\ u_2 & = & (0,1,0) \\ u_3 & = & (1,0,-1) \end{array} \right.$.

1) Déterminer la matrice de f dans la base B_c.

2) i) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii) Déterminer la matrice de f dans la base B.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1) Justifier que f est une symétrie.

2) Déterminer ses éléments caractéristiques ; base et direction.

Exercice 4

Considérons la famille $S = (cos, sin, exp)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Notons $E = vect(cos, sin, exp)$.

1) Montrer que S est une base de l'espace E.

2) Considérons l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par $\varphi : f \mapsto f'$.

i) Montrer que φ définit un endomorphisme de E.

ii) Déterminer la matrice de φ dans la base S.

Exercice 5

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \succeq 1$ et f un endomrphisme de E nilpotent d'indice n.

1) Montrer l'existence de $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
2) Déterminer la matrice de f dans cette base.
3) Déterminer la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x_0), ..., f(x_0), x_0)$

Exercice 6

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

Considérons la famille $B = (u_1, u_2, u_3)$ où $\begin{cases} u_1 & = & (1, 1-1) \\ u_2 & = & (0, 1, 1) \\ u_3 & = & (1, 2, 1) \end{cases}$

1) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de f dans cette base.
3) En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Que vaut $mat_{B_c}(f^n)$? où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

Notons B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 & = & (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 & = & (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 & = & (1, 0, 1) \end{cases}$.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A comme matrice dans la base B.

1) Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Chercher la matrice de f dans la base S.
3) Déterminer ker(f) et Im(f) ; expliciter pour chacun une base.

Exercice 8

Posons $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = diag(0, 1, 2)$.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ en est une base.

Soit $f \in L(E)$ tel que $mat_B(f) = A$.

1) Déterminer une base $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que $mat_S(f) = D$.
2) Déterminer la matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
3) Calculer P^{-1}.
4) En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) On considère maintenant les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1, y_0 = -1, z_n = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} & = & x_n - z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n - 2y_n - z_n \end{array} \right.$$

Notons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

i) Ecrire un programme Python permettant de calculer x_n, y_n et z_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
ii) Justifer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$
iii) En déduire le terme général de chacune des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
iv) Vérifier que la valeur de x_{19} donnée via ce programme Python coincide avec celle donnée par le terme général ainsi trouvé.

Exercice 9

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Etablir que $\mathbb{R}^3 = Ker(u) \oplus Im(u)$.
2) L'endomorphisme u est-il un projecteur ?
3) Déterminer toutes les puissances de A.