Partie 3 (PROBA)

Ex 2

On a : $X \sim B(8, \frac{1}{4})$

$\rightarrow$ Loi de X : $X(\Omega) = [\![0, 8]\!]$

$\forall\, 0 \leq k \leq 8,\ P(X=k) = C_8^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{8-k}$

$\rightarrow E(X) \underset{n=8, p=\frac{1}{4}}{=\!=\!=} np = 2$

$\rightarrow V(X) =\!=\!= npq = \frac{3}{2}$

Ex 3 : 1°) $X_n \sim B(n, \frac{2}{8} = \frac{1}{4})$

$X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$,

$\forall\, 0 \leq k \leq n,\ P(X_n = k) = C_n^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$

$E(X_n) = np = n/4$; $V(X) = npq = \frac{3n}{16}$

(2°) i) X_n : le nombre de boules blanches

$n - X_n$: " " noires

$\Rightarrow \boxed{Y_n = 2X_n + (n - X_n)\cdot(-3) = 5X_n - 3n}$

ii) Loi de Y_n :

$\rightarrow Y_n(\Omega) = [\![-3n, 2n]\!]$ car :

$0 \leq X_n \leq n \iff -3n \leq \underbrace{5X_n - 3n}_{=Y_n} \leq 2n$

$\rightarrow \forall -3n \leq l \leq 2n$, on a :

$P(Y_n = l) = P(5X_n - 3n = l) = P(X_n = \frac{3n+l}{5})$

$\Rightarrow \boxed{P(Y_n = l) = C_n^{\frac{3n+l}{5}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3n+l}{5}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2n-l}{5}}}$

iii) $E(Y_n) = E(5X_n - 3n) = 5\underbrace{E(X_n)}_{=n/4} - 3n$

$\Rightarrow \boxed{E(Y_n) = \frac{-7n}{4}}$

iv) $\boxed{V(Y_n)} = V(5X_n - 3n) = 5^2 \cdot \overbrace{V(X_n)}^{=3n/16} = \boxed{\frac{75n}{16}}$

Ex 4 :

1°) $Y_n \sim B(n, \frac{1}{2})$; en effet

c'est la répétition n fois du saut de la puce ; celui-ci a deux issues : une case ou deux cases sautées de même probabilité $1/2$.

Y_n compte le nombre de fois que la puce a sauté d'une case. En considérant le saut d'une case comme « succès », on aura que

$$Y_n \sim B(n, \tfrac{1}{2})$$

Ainsi : $\rightarrow Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

$\rightarrow \forall\, 0 \leq k \leq n,\ P(Y_n = k) = \underbrace{C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}_{= C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\rightarrow E(Y_n) = np = n/2$

$\rightarrow V(Y_n) = npq = n/4$

2°) $|0|1|2| - - - -$

i) case 0 - - - -

Y_n : le nombre de fois que la puce a sauté 1 case.

$(n - Y_n)$: " " " " 2 cases.

Ainsi : $X_n = 1\cdot Y_n + 2\cdot(n - Y_n)$

$\Rightarrow \boxed{X_n = 2n - Y_n}$

ii) $E(X_n) = E(2n - Y_n) = 2n - \overbrace{E(Y_n)}^{n/2} = 3n/2$

$V(X_n) = V(2n - Y_n) = (-1)^2 V(Y_n) = n/4$

iii) Loi de X_n :

$\rightarrow X_n(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$; en effet :

On a : $0 \leq Y_n \leq n \iff n \leq \underbrace{2n - Y_n}_{=X_n} \leq 2n$

$\rightarrow \forall n \leq k \leq 2n$, on a :

$P(X_n = k) = P(2n - Y_n = k)$

$= P(Y_n = 2n - k) = C_n^{2n-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Ex 5 :

1°) $X_n^{(1)} \sim B(n, 7/20)$; $X_n^{(2)} \sim B(n, 8/20)$

$X_n^{(3)} \sim B(n, 5/20)$.

Justification pour $X_n^{(1)}$ par exemple :

Le lancer de ce dé donne le numéro 1 avec la probabilité $7/20$ (c'est le succès pour nous).
On a repété le lancer n fois, et $X_n^{(1)}$ est le nombre de fois qu'on obtient 1 (succès).
$\Rightarrow X_n^{(1)} \sim B(n, 7/20)$

Ainsi, on a :

	Loi : $P(X_n^{(i)}=k)$	$E(X_n^{(i)})$	$V(X_n^{(i)})$
$X_n^{(1)}$	$C_n^k\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{n-k}$	$7n/20$	$n\cdot 7/20\cdot 13/20$
$X_n^{(2)}$	$C_n^k\left(\frac{8}{20}\right)^k\left(\frac{12}{20}\right)^{n-k}$	$8n/20$	$\frac{8n}{20}\cdot\frac{12}{20}$
$X_n^{(3)}$	$C_n^k\left(\frac{5}{20}\right)^k\left(\frac{15}{20}\right)^{n-k}$	$\frac{5n}{20}$	$\frac{5n}{20}\cdot\frac{15}{20}$

2°) Rappel : $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$ indépendantes si et ssi :
$\left(\forall k, l,\ (X_n^{(1)}=k) \text{ et } (X_n^{(2)}=l) \text{ sont deux événements indépendants}\right)$

$X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$ ne sont pas indépendantes ; en effet

$$P\left((X_n^{(1)}=0)\cap(X_n^{(2)}=0)\right) \neq P(X_n^{(1)}=0)\cdot P(X_n^{(2)}=0)$$

En effet :
On a $(X_n^{(1)}=0)\cap(X_n^{(2)}=0) \overset{S!}{=} (X_n^{(3)}=n)$
car $\boxed{X_n^{(1)}+X_n^{(2)}+X_n^{(3)}=n}$.

$\Rightarrow P\left((X_n^{(1)}=0)\cap(X_n^{(2)}=0)\right) = P(X_n^{(3)}=n) = \left(\frac{5}{20}\right)^n$

et on a $P(X_n^{(1)}=0)\cdot P(X_n^{(2)}=0) = \left(\frac{13}{20}\right)^n \times \left(\frac{12}{20}\right)^n$
qui sont différents

3) Le gain du jeu est :
$G_n = 1\cdot X_n^{(1)} + (-2)\cdot X_n^{(2)} + a\cdot X_n^{(3)}$

~~Soit G_n~~ Le gain moyen du jeu est $E(G_n)$

$$E(G_n) = E\left(X_n^{(1)} - 2X_n^{(2)} + aX_n^{(3)}\right)$$
$$= E(X_n^{(1)}) - 2E(X_n^{(2)}) + aE(X_n^{(3)})$$
en remplaçant $\frac{n(5a-9)}{20}$

(Le gain moyen du jeu est positif) $\Leftrightarrow E(G_n) \geq 0$
$\Leftrightarrow \boxed{a \geq \frac{9}{5} = 1{,}8}$.

(Toutes les valeurs $\geq 1{,}8$ conviennent)

Ex 6 :

1) On a $X \sim B(n,p)$.

Justification : On a la répétition n fois d'un appel téléphonique.
On considère "succès" quand le correspondant répond, et on a p sa probabilité.
X est le nombre de succès.
$\Rightarrow X \sim B(n,p)$

D'où $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$, $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$
$E(X)=np$, $V(X)=npq$

2) a) $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$

b) i) $p_0 = ?$

On a : $(Z=0)=(X+Y=0) \overset{S!}{=} (X=0)\cap(Y=0)$
$\Rightarrow p_0 = P(Z=0) = P((X=0)\cap(Y=0))$
$\Rightarrow p_0 = P(Y=0 / X=0)\cdot \underbrace{P(X=0)}_{C_n^0 p^0 q^n = q^n}$.

→ Sachant $(X=0)$:
alors personne n'a répondu aux 1ers n appels.
Ainsi, dans la 2ème fois que la secrétaire appelle, elle appelera n personnes.
$\Rightarrow \boxed{P(Y=0 / X=0) = C_n^0 p^0 q^n}$

enfin ; $\boxed{p_0 = q^n\cdot q^n = q^{2n}}$

ii) $p_1 = P(Z=1)$
or $(Z=1)=(X+Y=1)=(X=0, Y=1)\cup(X=1, Y=0)$

$\Rightarrow P(Z=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0)$.

ⓐ $P(X=0, Y=1) = \underbrace{P(Y=1 / X=0)}_{\substack{= C_n^1 p^1 q^{n-1} \\ \text{(Comme ci-dessus)}}} \cdot \underbrace{P(X=0)}_{q^n}$

ⓑ $P(X=1, Y=0) = \underbrace{P(Y=0 / X=1)}_{=?} \cdot \underbrace{P(X=1)}_{C_n^1 p^1 q^{n-1}}$

Sachant $X=1$:
La 2^{eme} fois que la secrétaire appelle, elle appelera $(n-1)$ personnes.

$\Rightarrow P(Y=0 / X=1) = C_{n-1}^0 p^0 \cdot q^{n-1} = q^{n-1}$

Ainsi $P(Z=1) = np\, q^{2n-1} + np\, q^{2n-2}$

D'où $\boxed{p_1 = np\, q^{2n-1} + np\, q^{2n-2}}$

(iii) $p_1 = np\, q^{2n-2}(1+q)$; en effet :

$p_1 = np\, q^{2n-1} + np\, q^{2n-2} = np\, q^{2n-2}(1+q)$

ⓒ $P_{(X=k)}(Y=h) = P(Y=h / X=k) = C_{n-k}^h p^h q^{n-k-h}$

En effet :
Sachant $(X=k)$:
$\Rightarrow$ La 2^{eme} fois que la secrétaire appelle, elle appelera $(n-k)$ personnes.

$\Rightarrow P(Y=h / X=k) = C_{n-k}^h p^h q^{(n-k)-h}$

ⓓ $P(Z=S) = \sum_{k=0}^{S} P((X=k) \cap (Y=S-k))$; en effet :

$P(Z=S) = P(X+Y=S)$

$= \sum_{k=0}^{n} P((X+Y=S) \cap X=k)$

Car $(X=k)_{0 \le k \le n}$ est un système complet d'événements.

Or $\forall k \geq S+1$, $(X+Y=S) \cap (X=k) = \emptyset$

Car $(X+Y=S)$ impose $(X \le S)$

alors :

$P(Z=S) = \sum_{k=0}^{S} P((X+Y=S) \cap (X=k))$

or on a $(X+Y=S) \cap (X=k) = (k+Y=S) \cap (X=k)$
$= (X=k) \cap (Y=S-k)$

$$\boxed{\Rightarrow P(Z=S) = \sum_{k=0}^{S} P((X=k) \cap (Y=S-k))}$$

e) i) $P(Z=S) = \sum_{k=0}^{S} P((X=k) \cap (Y=S-k))$

$= \sum_{k=0}^{S} \underbrace{P(Y=S-k / X=k)}_{\substack{C_{n-k}^{S-k} p^{S-k} \cdot q^{(n-k)-(S-k)} \\ \text{(d'après C°)}}} \cdot \underbrace{P(X=k)}_{C_n^k p^k q^{n-k}}$

$$\boxed{P(Z=S) = \sum_{k=0}^{S} C_n^k C_{n-k}^{S-k} p^S \cdot q^{2n-S-k}}$$

ii) $C_n^k C_{n-k}^{S-k} = \frac{n!}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k)!}}{(S-k)!\,(n-S)!}$

$= \frac{n!}{k!\,(S-k)!\,(n-S)!} = \underbrace{\frac{n!}{S!\,(n-S)!}}_{C_n^S} \cdot \underbrace{\frac{S!}{k!\,(S-k)!}}_{C_S^k}$

(iii) $P(Z=S) \overset{(ii)}{=} \sum_{k=0}^{S} C_n^S C_S^k p^S q^{2n-S-k}$

$= C_n^S p^S q^{2n-2S} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{S} C_S^k q^{S-k}}_{(1+q)^S \text{ ; bin. de Newton}}$

$\Rightarrow P(Z=S) = C_n^S p^S (1+q)^S q^{2n-2S}$
$= C_n^S (p(1+q))^S \cdot (q^2)^{(n-S)}$

f) (i) $p(1+q) \xrightarrow{p+q=1} (1-q)(1+q) = 1-q^2$

(ii) $P(Z=S) = C_n^S (1-q^2)^S (q^2)^{n-S}$, $\forall 0 \le S \le n$

$\Rightarrow Z \sim \mathcal{B}(n, 1-q^2)$

Ex7 :

$$\underset{A}{\boxed{0\ 0}} \quad \underset{B}{\boxed{1\ 1}}$$

1) i) $(p_0 = 1,\ q_0 = 0,\ r_0 = 0)$; en effet : à l'instant $(t=0)$, A contient $(0,0)$:
$\Rightarrow$ la somme est égale à 0.

ii) $(p_1 = 0,\ q_1 = 1,\ r_1 = 0)$; en effet : A l'instant $t=1$, on aura : $\underset{A}{\boxed{0\ 1}}\ \underset{B}{\boxed{0\ 1}}$
$\Rightarrow$ La somme dans A est 1

2) i) $p_{n+1} = P(P_{n+1})$

$$= \underbrace{P(P_{n+1}/P_n)}_{=0} \cdot \underbrace{P(P_n)}_{=p_n} + \underbrace{P(P_{n+1}/Q_n)}_{=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \underbrace{P(Q_n)}_{=q_n} + \underbrace{P(P_{n+1}/R_n)}_{=0} \underbrace{P(R_n)}_{=r_n}$$

Explications.

Sachant P_n : Alors $\underset{A}{\boxed{0\ 0}}\ \underset{B}{\boxed{1\ 1}}$
et à l'instant $(n+1)$, on aura : $\underset{A}{\boxed{0\ 1}}\ \underset{B}{\boxed{0\ 1}}$
Ω_1

Ω_2 Sachant Q_n : Alors $\underset{A}{\boxed{0\ 1}}\ \underset{B}{\boxed{0\ 1}}$

Sachant R_n : Alors $\underset{A}{\boxed{1\ 1}}\ \underset{B}{\boxed{0\ 0}}$
et à l'instant $(n+1)$, on aura :
Ω_3 $\quad \underset{A}{\boxed{0\ 1}}\ \underset{B}{\boxed{0\ 1}}$

$\rightarrow \Omega_1 \Rightarrow P(P_{n+1}/P_n) = 0$

$\rightarrow \Omega_2 \Rightarrow P(P_{n+1}/Q_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, car c'est la probabilité de tirer 1 de A et 0 de B.

$\rightarrow \Omega_3 \Rightarrow P(P_{n+1}/R_n) = 0$

Enfin $p_{n+1} = \frac{1}{4} q_n$

ii) $q_{n+1} = P(Q_{n+1})$

$$= \underbrace{P(Q_{n+1}/P_n)}_{1} \underbrace{P(P_n)}_{p_n} + \underbrace{P(Q_{n+1}/Q_n)}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \underbrace{P(Q_n)}_{q_n} + \underbrace{P(Q_{n+1}/R_n)}_{1} \underbrace{P(R_n)}_{r_n}$$

Explications :

$\rightarrow \Omega_1 \Rightarrow P(Q_{n+1}/P_n) = 1$

$\rightarrow \Omega_2 \Rightarrow \underset{A}{\boxed{0\ 1}}\ \underset{B}{\boxed{0\ 1}}$, et la somme à l'instant $(n+1)$ dans A est égale à 1 correspond à garder la même situation $\underset{A}{\boxed{0\ 1}}\ \underset{B}{\boxed{0\ 1}}$, càd (tirer 0 de A et 0 de B) ou (tirer 1 de A et 1 de B) dont la probabilité est :
$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$

$\rightarrow \Omega_3 \Rightarrow P(Q_{n+1}/R_n) = 1$

Enfin : $q_{n+1} = p_n + \frac{1}{2} q_n + r_n$

iii) $r_{n+1} = P(R_{n+1})$ de même

$$= \underbrace{P(R_{n+1}/P_n)}_{0} \cdot P(P_n) + \underbrace{P(R_{n+1}/Q_n)}_{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \underbrace{P(Q_n)}_{q_n} + \underbrace{P(R_{n+1}/R_n)}_{0} P(R_n)$$

$\Rightarrow \boxed{r_{n+1} = \frac{1}{4} q_n}$

Conclusion :
$$\boxed{\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{4} q_n \\ q_{n+1} &= p_n + \frac{1}{2} q_n + r_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{4} q_n \end{aligned}}$$

3°) $q_{n+2} = p_{n+1} + \frac{1}{2} q_{n+1} + r_{n+1} = \frac{1}{2} q_{n+1} + \frac{1}{2} q_n$

4°) On a : $\forall n \geq 0,\ q_{n+2} = \frac{1}{2} q_{n+1} + \frac{1}{2} q_n$
C'est une suite récurrente d'ordre 2.
$\rightarrow$ son équation caractéristique est :
$(E_c)\quad r^2 - \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0$
de solutions $\left(r_1 = 1 \text{ et } r_2 = -\frac{1}{2}\right)$

Alors le terme général de la suite $(q_n)_{n\geq 0}$ est :

$$\left(\forall n \geq 0,\ q_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n = A + B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

où A et $B \in \mathbb{R}$.

Pour $\begin{pmatrix} n=0 \text{ et } n=1 \\ q_0 = 0 \text{ et } q_1 = 1 \end{pmatrix}$, on obtient le système

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - \frac{B}{2} = 1 \end{cases},\ \text{càd} \begin{cases} A = 2/3 \\ B = -2/3 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

C'est q_n en fonction de n

$\rightarrow \forall n \geq 1$; $p_n = r_n = \frac{1}{4} q_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

$\Rightarrow \forall n \geq 1,\ p_n = r_n = \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

5°) i) $\lim_n p_n = \lim_n r_n = \frac{1}{6}$

$\lim_n q_n = 2/3$

ii) Interprétation :

Après un nombre assez grand de permutation des boules entre A et B, les chances que contient des jetons de numéros différents est de 66,6 %. et il y aura les mêmes chances que A contient deux jetons portant 0 que portant 1 : 16,6 %

Partie 3 : Page 5