Correction

Partie I

1.a $H_1, H_2 \subset H_1 + H_2 \subset E$ donc $n-1 \leq \dim H_1 + H_2 \leq n$.
Si $\dim H_1 + H_2 = n-1$ alors par inclusion et égalité des dimensions $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$ ce qui est exclu. Par suite $\dim H_1 + H_2 = n$ et donc $H_1 + H_2 = E$.

1.b Si $H_1 \neq H_2$ alors $\dim H_1 \cap H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 + H_2 = n-2$.
Si $H_1 = H_2$ alors $H_1 \cap H_2 = H_1$ puis $\dim H_1 \cap H_2 = n-1$.

2.a Si $F \subset H$ alors $F \cap H = F$ et $\dim F \cap H = \dim F$.
Si $F \not\subset H$ alors considérons $H + F$.
On a $H \subset F + H \subset E$ donc $n-1 \leq \dim F + H \leq n$.
Si $\dim F + H = n-1$ alors par inclusion et égalité des dimensions $H = F + H$. Or $F \subset F + H$ donc $F \subset H$ ce qui est exclu. Nécessairement $\dim F + H = n$.
Par suite $\dim F \cap H = \dim H + \dim F - \dim F + H = \dim F - 1$.

2.b Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ *.
Pour $p = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $p \geq 1$.
Soit $H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}$ des hyperplans de E.
Soit $F = H_1 \cap \ldots \cap H_p$. Par HR : $\dim F \geq n - p$.
$H_1 \cap \ldots \cap H_p \cap H_{p+1} = F \cap H_{p+1}$ et d'après l'étude précédente $\dim F \cap H_{p+1} \geq \dim F - 1$.
Par suite $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_p \cap H_{p+1}) \geq n - (p+1)$.
Récurrence établie.

3.a Considérons $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une base de F. C'est une famille libre de vecteurs de E, on peut donc la compléter en une base de E de la forme $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ et cette base convient.

3.b Par construction $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de H_i.
De plus cette famille est libre car sous-famille d'une famille libre, c'est donc une base de H_i.
Par suite $\dim H_i = n-1$ et H_i est un hyperplan de E.

3.c Soit $\vec{x} \in H_{p+1} \cap \ldots \cap H_n$.
Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, on peut écrire $\vec{x} = \lambda_1.\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n.\vec{e}_n$.
Pour tout $p+1 \leq i \leq n$, on a $\vec{x} \in H_i = \text{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n)$.
On peut donc aussi écrire $\vec{x} = \mu_1.\vec{e}_1 + \cdots + \mu_{i-1}.\vec{e}_{i-1} + 0.\vec{e}_i + \cdots + \mu_{i+1}.\vec{e}_{i+1} + ... + \mu_n.\vec{e}_n)$.
Par unicité des composantes d'un vecteur dans une base obtient : $\lambda_i = 0$.
Ainsi $\vec{x} = \lambda_1.\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_p.\vec{e}_p + \vec{o} \in F$ et donc $H_{p+1} \cap \ldots \cap H_n \subset F$.
De plus $\dim H_{p+1} \cap \ldots \cap H_n \geq n - (n-p) = p = \dim F$ donc $\dim H_{p+1} \cap \ldots \cap H_n = \dim F$ puis $H_{p+1} \cap \ldots \cap H_n = F$.

3.d Considérons $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Posons pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $H_i = \text{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n)$. H_i est un hyperplan.
Par la même démarche que ci-dessus, on observe que $H_1 \cap \ldots \cap H_n = \{\vec{o}\}$.

Partie II

1. $\dim F_0 = 0$ et $\dim F_n = n$ donc $F_0 = \{\vec{o}\}$ et $F_n = E$.

2.a Si $F_i \subset F_{i-1}$ alors $F_i = F_{i-1}$ puisqu'on sait $F_{i-1} \subset F_i$. Or $\dim F_{i-1} \neq \dim F_i$. Ceci est donc impossible.

Par suite $F_i \not\subset F_{i-1}$ et donc $\exists \vec{e}_i \in F_i$ tel que $\vec{e}_i \notin F_{i-1}$.

2.b Montrons que $\mathcal{B}$ est libre :

Version légère :

Supposons $\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{o}$.

Si $\lambda_n \neq 0$ alors $\vec{e}_n = -\dfrac{1}{\lambda_n}(\lambda_1.\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_{n-1}.\vec{e}_{n-1})$.

Or $\vec{e}_1 \in F_1 \subset F_{n-1}, \ldots, \vec{e}_{n-1} \in F_{n-1}$ donc $\vec{e}_n \in F_{n-1}$ ce qui est exclu.

Nécessairement $\lambda_n = 0$.

On obtient alors la relation $\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_{n-1}\vec{e}_{n-1} = \vec{o}$ et on réitère le processus de sorte d'obtenir successivement $\lambda_{n-1} = 0, \ldots,$ puis $\lambda_1 = 0$.

Version lourde (mais plus rigoureuse) :

Par l'absurde, supposons $\mathcal{B}$ liée.

On peut alors écrire $\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{o}$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0,...,0)$.

Notons p le plus grand élément entier tel que $\lambda_p \neq 0$.

On a la relation $\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{e}_p = \vec{o}$ car par définition de p, $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$.

On peut alors écrire $\vec{e}_p = -\dfrac{1}{\lambda_p}(\lambda_1.\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_{p-1}.\vec{e}_{p-1})$.

Or $\vec{e}_1 \in F_1 \subset F_{p-1}, \ldots, \vec{e}_{p-1} \in F_{p-1}$ donc $\vec{e}_p \in F_p$. C'est absurde.

Dans les deux versions, $\mathcal{B}$ est une famille libre formée de $n = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

2.c Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.

La famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_i)$ est une famille libre car sous famille d'une famille libre.

De plus, pour tout $j \in \{1, \ldots, i\}$ on a $\vec{e}_j \in F_i$ car $F_j \subset F_i$.

La famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_i)$ est donc une famille libre formée de $i = \dim F_i$ vecteurs de F_i, c'est donc une base de F_i et par suite $F_i = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_i)$.

3.a Considérons $H_i = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n)$.

Par les mêmes arguments qu'en I.3.b, H_i est un hyperplan.

Puisque $F_i \not\subset H_i$, on a $\dim F_i \cap H_i = \dim F_i - 1 = i - 1$.

Puisque $F_{i-1} \subset F_i$ et $F_{i-1} \subset H_i$, on a $F_{i-1} \subset F_i \cap H_i$.

Par inclusion et égalité des dimensions : $F_{i-1} = F_i \cap H_i$.

3.b $F_{n-1} = F_n \cap H_n = H_n$ puisque $F_n = E$.

$F_{n-2} = F_{n-1} \cap H_{n-1} = H_{n-1} \cap H_n, \ldots, F_0 = F_1 \cap H_1 = H_1 \cap \ldots \cap H_n$.