

CONCOURS COMMUN 2006
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve de Mathématiques
(toutes filières)

CORRECTION

DEUXIEME PROBLEME

Généralités sur f_n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x , $|\cos x| \leq 1$ et en particulier, $2 - \cos x \neq 0$. f_n est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 - \cos(-x)} - \frac{-x}{n} = -\frac{\sin x}{2 - \cos x} + \frac{x}{n} = -f_n(x)$. f_n est donc impaire.

3. f_0 est clairement 2π -périodique. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x + 2\pi) - f_n(x) = -\frac{2\pi}{n} \neq 0.$$

Pour $n \geq 1$, f_n n'est pas 2π -périodique.

4. Néanmoins, pour $n \geq 1$, le calcul précédent montre le graphe de f_n sur un intervalle $[a, b]$ se déduit du graphe de f_n sur $[a - 2\pi, b - 2\pi]$ par translation de vecteur $(2\pi, -\frac{2\pi}{n})$. On peut donc étudier f_n et construire son graphe sur un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$, puis on obtient le graphe complet par translations successives de vecteur $(2\pi, -\frac{2\pi}{n})$ ou de vecteur $(-2\pi, \frac{2\pi}{n})$. Enfin, f_n étant impaire, il suffit de l'étudier et de construire son graphe sur $[0, \pi]$. On obtient alors le graphe sur $[-\pi, \pi]$ par symétrie centrale de centre O .

La démarche est analogue pour f_0 qui est impaire et 2π -périodique.

Etude de la fonction f_0 .

5. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$,

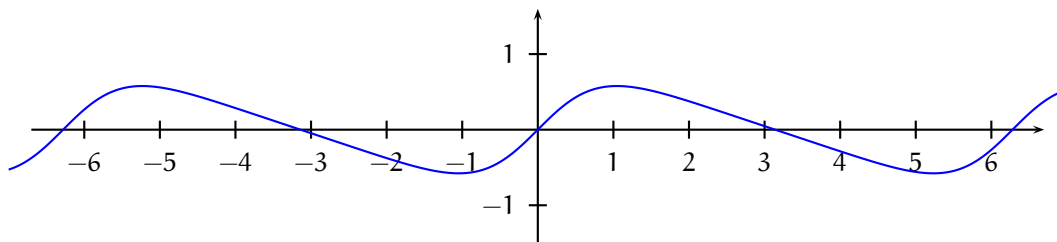
$$f'_0(x) = \frac{\cos x(2 - \cos x) - \sin x(\sin x)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}.$$

6. Sur $[0, \pi]$, f'_0 est du signe de $2 \cos x - 1$ et donc strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{3}[$, strictement négative sur $] \frac{\pi}{3}, \pi]$ et nulle en $\frac{\pi}{3}$.

7. Tableau de variations de f .

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'_0(x)$	+	0	-
f_0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Graphe de f .



8. Le maximum de f_0 sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et, f_0 étant impaire, le minimum de f_0 sur $\mathbb{R}$ est $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit que le maximum de $|f_0|$ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Utilisation d'une primitive de f_0 .

9. Une primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$ est $F_0 : x \mapsto \ln(2 - \cos x)$ et donc,

$$\int_0^{\pi/3} f_0(x) \, dx = [\ln(2 - \cos x)]_0^{\pi/3} = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

10. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (H) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2 - \cos x)f'(x) + (\sin x)f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((2 - \cos x)f)'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, (2 - \cos x)f(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{C}{2 - \cos x} \end{aligned}$$

11. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (a \cos x + b)' + \frac{\sin x}{2 - \cos x} (a \cos x + b) &= \frac{-a \sin x(2 - \cos x) + \sin x(a \cos x + b)}{2 - \cos x} = \frac{2a \sin x \cos x + (b - 2a) \sin x}{2 - \cos x} \\ &= \sin x \frac{2a \cos x + (b - 2a)}{2 - \cos x} \end{aligned}$$

On choisit alors a et b tels que $b - 2a = 4$ et $2a = -2$, ou encore on prend $a = -1$ puis $b = 2$. Pour ces valeurs de a et b , $\sin x \frac{2a \cos x + (b - 2a)}{2 - \cos x} = 2 \sin x$. Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto -\cos x + 2$.

Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ et $x \mapsto 2 \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ et de la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\cos x + 2 + \frac{C}{2 - \cos x}$.

12. $h(0) = 1 \Leftrightarrow C + 1 = 1 \Leftrightarrow C = 0$. La solution de (E) sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 1 en 0 est la fonction

$$h : x \mapsto 2 - \cos x.$$

Etude de la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)}$.

16. g est définie sur $\mathbb{R}^*$, paire.

17. Quand x tend vers 0, $g(x) = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{2 - \cos x} \sim 1 \cdot \frac{1}{2 - 1} = 1$. Donc, $g(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

18. On pose $g(0) = 1$ et on prolonge ainsi par continuité la fonction g en 0. Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x(2 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)))} = (1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3))(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3))^{-1} \\ &= (1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) = 1 + x^2(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}) + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

19. g admet en particulier un développement limité d'ordre 1 en 0 à savoir $g(x) = 1 + 0 \cdot x + o(x)$. On en déduit que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

20. g est dérivable sur $[0, \pi]$ et g' est strictement négative sur $]0, \pi]$. Donc, g est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. g réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[g(\pi), g(0)] = [0, 1]$.

Etude d'une suite qui annule f_n .

21. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après

$$f_n(a) = 0 \Rightarrow f_0(a) - \frac{a}{n} = 0 \Rightarrow a = n f_0(a) \Rightarrow a = |a| = n |f_0(a)| \leq \frac{n}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $a \in [0, \frac{n}{\sqrt{3}}]$ (erreur d'énoncé).

22. $f_n(0) = 0$ et 0 est solution de l'équation $f_n(x) = 0$ (erreur d'énoncé). D'autre part, pour $x \in]0, \pi]$,

$$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{2 - \cos x} - \frac{x}{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{n}.$$

D'après 20., g réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, 1]$. Comme $\frac{1}{n} \in [0, 1]$, $\frac{1}{n}$ a un unique antécédent par g dans $[0, \pi]$.

On a $g(0) = 1$. Donc, pour $n = 1$, l'antécédent de $\frac{1}{n}$ est 0, ce qui montre que l'équation $f_1(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0, \pi]$ et donc que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0, \pi]$, à savoir $x_1 = 0$.

Si $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < 1$ et l'antécédent de $\frac{1}{n}$ par g est dans $]0, \pi]$. Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $[0, \pi]$ exactement deux solutions, à savoir 0 et un réel x_n élément de $]0, \pi]$.

23. Pour $n \geq 2$, on a $g(x_n) = \frac{1}{n}$ et donc, $x_n = h(\frac{1}{n})$ (où $h = g^{-1}$). Puisque g est continue sur $[0, \pi]$, h est continue sur $[0, 1]$ et en particulier en 0. La suite $(x_n) = (h(\frac{1}{n}))$ converge donc vers $h(0) = \pi$ (puisque $g(\pi) = 0$).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \pi.$$

FIN

