

Correction

d'après ENAC Pilotes 1989

1. $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est une fonction continue positive donc $F : X \rightarrow \int_0^X e^{-t^2} dt$ est croissante.

Pour $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ donc $F(X) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^X e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + 1 - e^{-X} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + 1$.

Ainsi la fonction F est majorée. Par suite F converge en $+\infty$.

- 2.a $a_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ et $a_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$.

- 2.b $x \mapsto \sin^{n+1} x$ est continue, positive sans être la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$ donc $a_{n+1} > 0$.

$x \mapsto \sin^n x - \sin^{n+1} x = \sin^n x(1 - \sin x)$ est aussi continue, positive sans être la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$ donc $a_n > a_{n+1}$.

- 2.c $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \sin^{n-2} x dx = a_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$

donc $a_n = a_{n-2} - \left[\frac{1}{n-1} \cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = a_{n-2} - \frac{1}{n-1} a_n$

d'où la relation $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$.

- 2.d Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

Pour $n = 1$: $na_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$:

$(n+1)a_{n+1}a_n = na_{n-1}a_n = \frac{\pi}{2}$.

Récurrence établie.

- 2.e $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$ donne $\frac{n}{n+1} a_{n-1} < a_n < a_{n-1}$ puis $\frac{n}{n+1} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

- 2.f Le résultat ci-dessus donne $a_{n-1} \sim a_n$ et la relation $na_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ conduit à $na_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ d'où $a_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$.

Il en découle $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. h est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ d'où :
- | | | | |
|--------|-----------|-------------------------------|-----------|
| x | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$
0
$\nearrow$ | $+\infty$ |

Il en découle : $\forall x \in] -1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

- 4.a La fonction $X \mapsto \int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$ est évidemment croissante de part la positivité de la fonction intégrée.

Le changement de variable proposé donne $\int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = \int_0^{\arctan \frac{X}{\sqrt{n}}} \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)^{n-1}}$.

On en déduit $\int_0^x \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} \leq \frac{\pi}{2}.$

La fonction $X \mapsto \int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$ étant croissante et majorée, elle converge en $+\infty$ et c_n existe.

$$4.b \quad \forall x \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \leq e^{-x^2} \text{ car } -\frac{x^2}{n} \in]-1, 0] \text{ donc } \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}.$$

Par suite : $b_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx.$

$$\forall x \in [0, \sqrt{n}], \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)} \geq e^{-x^2} \text{ car } \frac{x^2}{n} \geq 0 \text{ donc } \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \geq \frac{x^2}{n}.$$

Par suite $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}.$

4.c Pour réexprimer b_n , réalisons le changement de variable : $x = \sqrt{n} \sin t$:

$$b_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n} \cos t (1 - \sin^2 t)^n dt = \sqrt{n} a_{2n+1}.$$

Pour réexprimer c_n , réalisons le changement de variable : $x = \sqrt{n} \tan t$:

$$c_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n} (1 + \tan^2 t) \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)^n} = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)^{n-1}} = \sqrt{n} a_{2n-2} \text{ car } \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t.$$

$$5. \quad b_n = \sqrt{n} a_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad c_n = \sqrt{n} a_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et } \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

L'encadrement de 4.b donne à la limite : $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Finalement voilà la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$