Exercice 11:

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$.

b) Calculer $f(0)$ et $\lim_{+\infty} f$.

c) On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$. Montrer

$$g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

d) Conclure $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 12:

On pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est continue sur $[0\,;+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.

b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $F''(x)$.

c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15:

a) Démontrer que la fonction Γ donnée par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

b) Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

c) En exploitant l'inégalité de Cauchy Schwarz, établir que la fonction $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ est convexe.

Exercice 17:

a) Donner le domaine de définition de la fonction

$$\Gamma\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

b) Calculer l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^{n} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

c) Expliquer rapidement pourquoi $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$