

Extrait

Exercice

Calcul de la somme de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x \right) \cos(kx) dx = \frac{1}{k^2}$.
2. Soit $x \in]0, \pi[$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{ix} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.
 - b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2}) \cos(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$.
3. Soit ψ une fonction réelle de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi(x) \sin(mx) dx = 0$.
4. Soit g la fonction réelle définie sur $[0, \pi]$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2 \sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \in]0, \pi[\\ g(0) = -1 \end{cases}$.
 Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$.
 5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x) \sin(\frac{(2n+1)}{2}x) dx$.
 - b) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
6. Pour tout réel $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)}$.
 - a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x)$ est bien définie.
 - b) Justifier l'existence de la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $\varphi(x)$ et déterminer sa valeur.

Fin extrait