CCP-2017 - MP

Extrait

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

3. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.
4. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

3) Rappel :

i) La suite double positive $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable si et ssi :

$$\begin{cases} 1)\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \text{ la série } \sum_{q\geq 1} \frac{1}{p^2q^2} \text{ Converge.} \\ 2)\ \text{La série } \sum_{p\geq 1} \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2q^2}\right) \text{ Converge.} \end{cases}$$

ii) En cas de sommabilité, on a :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2q^2}\right)$$

Pour 1) : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{q\geq 1} \frac{1}{p^2q^2}$ Converge puisque $\sum_{q\geq 1} \frac{1}{q^2}$ Converge. (Riemann ; $\alpha = 2 > 1$)

Pour 2) :

2) La série $\sum_{p\geq 1}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2q^2}\right)$ converge.

$$\forall p\geq 1,\quad \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2q^2}=\frac{1}{p^2}\cdot\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}=\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{p^2}$$

Alors la série $\sum_{p\geq 1}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2q^2}\right)$ c'est $\sum_{p\geq 1}\left(\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{p^2}\right)$ qui converge ; (Encore série de Riemann).

D'où la suite double positive $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.

Et on a :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2q^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2q^2}\right)$$

$$=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{p^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{6}\cdot\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

$\square$

4. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

Rappel :

Soit $(a_{pq})_{(p,q)\in A}$ suite double positive vérifiant :

Si $\begin{cases} 1) \ \forall (p,q)\in A, \ \dfrac{1}{p^2+q^2} \geqslant a_{pq} \\ 2) \text{ La famille } (a_{pq})_{(p,q)\in A} \text{ n'est pas sommable} \end{cases}$

Alors la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

Soit $(p,q)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

On a $p^2+q^2 \leqslant p^2+q^2+2pq=(p+q)^2$

$\Rightarrow \forall (p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, \ \dfrac{1}{p^2+q^2} \geqslant \dfrac{1}{(p+q)^2}$

Pour conclure, il reste à vérifier que la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

C'est une suite double positive.

Considérons la partition $(I_n)_{n\geqslant 2}$ de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$I_n=\{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \,/\, p+q=n\}$.

Voici un rappel du cours qui servira ici :

Rappel : La famille positive $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable si et ssi :

A) $\forall n \geqslant 2$, la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in I_n}$ est sommable.

B) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{(p,q)\in I_n}\frac{1}{(p+q)^2}\right)$ converge.

Pour A) : Étant finie, la famille est donc sommable.

Pour B) :

Soit $n \geqslant 2$.

$$\left(\forall (p,q)\in I_n,\ \frac{1}{(p+q)^2}=\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{(p,q)\in I_n}\frac{1}{(p+q)^2} = \frac{1}{n^2}\cdot \mathrm{card}(I_n) = \frac{n-1}{n^2}$$

Car
$$I_n = \{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \,/\, p+q=n\} = \{(p,n-p)\,/\,1\leqslant p\leqslant n-1\}$$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{(p,q)\in I_n}\frac{1}{(p+q)^2}\right)$ est $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{n-1}{n^2}$ qui diverge

Car $\frac{n-1}{n^2}\sim\frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ diverge (Riemann : $\alpha=1\leqslant 1$)

Enfin la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Fin