

**ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLE NORMALES SUPERIEURES**

CONCOURS D'ADMISSION 2024

LUNDI 15 AVRIL 2024

08h00 - 12h00

FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES A (XLSR)

Extrait pour les 1ères Années

Durée : 4 heures

***L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le problème comporte deux parties qui sont indépendantes.

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle *point fixe* de σ un élément $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma(i) = i$. On note $\nu(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ . On appelle *dérangement* une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe. On note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et D_n son cardinal.

Si k est un entier naturel tel que $k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial correspondant au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ pour un entier naturel $k > n$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. Si de plus $n \geq 0$ est un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

Si $n \geq 0$ et $d \geq 1$ sont deux entiers naturels, on note $d \mid n$ la relation « d divise n ».

Si x est un réel, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Si p est un nombre premier et n un entier naturel non nul, on note

$$\nu_p(n) = \max\{\nu \in \mathbb{N} : p^\nu \mid n\}.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Pour tout ensemble E , on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

On note $\ln_2$ la fonction de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln_2(x) = \ln(\ln(x))$.

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels, on note, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{E(x)} a_n, \quad \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} a_p = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p, \quad \prod_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} a_p = \prod_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p$$

avec la convention que la somme indexée par l'ensemble vide vaut 0 et le produit indexé par l'ensemble vide vaut 1.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Première partie

Soit un entier naturel $n \geq 2$. Pour tout nombre réel x , on considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$M_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \det(xI_n + M_0) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$

1b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

2. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma) + 1}.$$

3. Établir que

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

4. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, préciser à quelle condition sur $\nu(\sigma)$, on a $\sigma \in \mathfrak{D}_n$. En déduire que

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1}(n-1).$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-1}{0} & & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ \binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

5a. Justifier que les familles $(1, X, \dots, X^m)$ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5b. Montrer que la transposée de M est la matrice de l'application linéaire identité

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_m[X] \\ P & \longmapsto & P \end{array}$$

dans les bases $(1, X, \dots, X^m)$ au départ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ à l'arrivée.

5c. Établir que M est inversible et expliciter son inverse.

5d. En déduire que pour tous $(u_0, \dots, u_m), (v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\text{si } \forall k \leq m, \quad u_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} v_\ell, \quad \text{alors } \forall k \leq m, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell.$$

Fin Extrait