Systèmes linéaires
Résumé

Cas général

Considérons le système linéaire suivant :

$$\Sigma \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a) $$H \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ est le système linéaire homogène associé à Σ.

b) $(x_1, \dots, x_n)$ les inconnues.

c) $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ le second membre du système Σ.

d) $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ est la matrice du système Σ

e) Si $m = n$, Σ est dit système carré d'ordre n.

Proposition

Notons A la matrice de Σ, B son second membre et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la colonne de ses inconnues. On a :

$$\boxed{(x_1, \dots, x_n) \text{ solution de } \Sigma \iff AX = B}$$

Vocabulaire

« $AX = B$ » s'appelle l'écriture matricielle du système Σ.

NB :

Résoudre le système Σ est équivaut à résoudre l'équation matricielle « $AX = B$ » d'inconnue X.

Système de Cramer

On considère maintenant le système carré suivant :

$$\Sigma \begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

A désigne sa matrice associée.

Définition 1

Le système Σ est dit système de Cramer si et seulement si sa matrice A est inversible.

Proposition 2

Tout système de Cramer possède une unique solution.

Réflèxe à avoir

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \iff (x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)$$

si le système est de Cramer.

Résolution d'un système de Cramer

Résolution d'un système de Cramer triangulaire supérieur

Définition

Un système carré est dit triangulaire supérieur si et seulement si sa matrice est triangulaire supérieure.

Cas général

Considérons le système triangulaire supérieur de Cramer :

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On résout (Σ) par remontée :

① On commence par la dernière équation : $\boxed{x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}}$

② On remonte à l'avant dernière équation :

$$a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1}$$

On remplace x_n par sa valeur trouvée. Puis on tire la valeur de x_{n-1} :

$$\boxed{x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n\right)}$$

3 On remonte de proche en proche, jusqu'à la première équation. On remplace $x_n, \dots, x_2$ par leur valeurs trouvées, et on tire x_1 :

$$\boxed{x_1 = \frac{b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_{1i}\, x_i}{a_{11}}}$$

Fin

Cas général

Résumé

Pour la résolution d'un système de Cramer via la méthode du pivot de Gauss :

Etape 1 :

On échelonne le système.

Etape 2 :

Le système est ainsi un système échelonné triangulaire supérieur.

On le résout alors par remontée, comme vu dans le paragraphe précédant.

Résolution d'un système homogène quelconque

Exemple illustrant la méthode de résolution

Exemple

Considérons le système homogène suivant :

$$(H)\begin{cases} -x+6y-z=0 \\ 2x-5y+3z=0 \end{cases}$$

Notons S l'ensemble des solutions de (H).

Résolvons ce système par la méthode de Gauss.

On déterminera en particulier une base de S.

« On verra que S est un espace vectoriel »

Solution

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$(x,y,z)\in S \iff \begin{cases} -x+6y-z=0 \\ 2x-5y+3z=0 \end{cases}$$

« On échelonne d'abord le système »

$$\iff \begin{cases} -x+6y-z=0 \\ \quad\quad 7y+z=0 \quad L_2\leftarrow L_2+2L_1 \end{cases}$$

« Le système est échelonné »

Vocabulaire

1) x et y : les inconnues principales.
2) z : inconnue secondaire.

Etape suivante

$\boxed{\text{On déplace l'inconnue secondaire vers l'autre côté.}}$

$$(x,y,z)\in S \iff \begin{cases} -x+6y-z=0 \\ 7y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{cases} -x+6y=z \\ 7y=-z \end{cases}}$$

système triangulaire supérieur d'inconnues x et y. On le résout par remontée.

$$\iff \begin{cases} x=-\frac{13}{7}z \\ y=-\frac{z}{7} \end{cases}$$

étape à mémoriser

$$\iff (x,y,z)=\left(-\frac{13}{7}z,-\frac{z}{7},z\right)$$

$$\iff (x,y,z)=z.\left(-\frac{13}{7},\frac{-1}{7},1\right)$$

$$\iff (x,y,z)\in \text{vect}\left(\left(-\frac{13}{7},\frac{-1}{7},1\right)\right)$$

Enfin :

$$\boxed{(x,y,z)\in S \iff (x,y,z)\in \text{vect}\left(\left(-\frac{13}{7},\frac{-1}{7},1\right)\right)}$$

D'où

$S=\text{vect}\left(\left(-\frac{13}{7},\frac{-1}{7},1\right)\right)$

Une base de S est $\left(\left(-\frac{13}{7},\frac{-1}{7},1\right)\right)$

Fin

Cas général

Définition 1

Le rang d'un système linéaire est celui de sa matrice associée.

Proposition 2

Considérons un système homogène :

$$(H) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

à m équations et n inconnues.

Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et r son rang.

On a :

1) S_H est un espace vectoriel.

2) $\dim(S_H) = n - r$ $\square$

Fin