

Extrait du CNC Marocain pour 1ère Année

Année 2024

Filière MP

Exercice

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Vérifier que $PQ = 4I_3$.
b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1} .
2. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que $Au = u$, $Av = 2v$ et $Aw = 2w$. → Question modifiée pour qu'elle soit faisable pour la première année.
- b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.
3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.
b) Déterminer, pour tout entier naturel n , D^n en fonction de n .
c) En déduire pour tout entier naturel n , l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

Fin Extrait