Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Q1. $((X_0 = 1), (X_0 = 2))$ forme un système complet d'événements de probabilités non nulles
La formule des probabilités totales nous donne :
$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}$
de même : $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(X_1 = 2 \mid X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{La loi de } X_1 \text{ est donnée par } P(X_1 = 1) = \dfrac{3}{8} \text{ et } P(X_1 = 2) = \dfrac{5}{8}}$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. De même qu'à la question précédente, avec la formule des probabilités totales on a :
$P(X_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2)P(X_n = 2)$
et $P(X_{n+1} = 2) = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2)P(X_n = 2)$
ce qui peut s'écrire :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{4}P(X_n = 2) \text{ et } P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{3}{4}P(X_n = 2)$$

ce qui s'écrit matriciellement : $\boxed{\mu_{n+1} = \mu_n A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}$

Q3. À l'aide de la calculatrice, $\boxed{\text{La loi de } X_5 \text{ est donnée par } P(X_5 = 1) \approx 0{,}33 \text{ et } P(X_5 = 2) \approx 0{,}67}$

Q4. Méthode 1 Pour $i \in \{1, 2\}$, on note P_i la probabilité conditionnelle $P_{(X_0 = i)}$
On a clairement $P_1(T = 0) = 1$ et $P_2(T = 0) = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P_1(T = k) = 0$
En supposant $(X_0 = 2)$; jusqu'au premier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_k = 1$, on a une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\dfrac{1}{4}$, le succès étant "passer de l'état 2 à l'état 1" .
Cette modélisation cache le manque de rigueur de la méthode 2 et de sa variante !
Ainsi pour P_2, T suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{4}$ et donc $P_2(T = k) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}$
La formule des probabilités totales s'écrit pour $k \in \mathbb{N}$: $P(T = k) = \dfrac{1}{2}\left(P_1(T = k) + P_2(T = k)\right)$
Ainsi $\boxed{\text{La loi de T est alors donnée par : } P(T = 0) = \dfrac{1}{2} \text{ et pour } k > 0,\ P(T = k) = \dfrac{3^{k-1}}{2 \cdot 4^k}}$

Méthode 2 *moins rigoureuse* Soit $k \in \mathbb{N}$.
Si $k = 0$, alors $P(T = 0) = P(X_0 = 1) = \dfrac{1}{2}$
si $k > 0$, alors $(T = k) = (X_k = 1) \cap \displaystyle\bigcap_{i=0}^{k-1} (X_i = 2)$
En utilisant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(T = k) = P\left((X_k = 1) \mid \bigcap_{i=0}^{k-1}(X_i = 2)\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} P\left((X_i = 2) \mid \bigcap_{j=0}^{i-1}(X_j = 2)\right)$$

avec la convention (pour $i = 0$), $P\left((X_0 = 2) \mid \displaystyle\bigcap_{j=0}^{0-1}(X_k = 2)\right) = P\left(X_0 = 2\right) = \dfrac{1}{2}$

et pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, $\mathrm{P}\left((\mathrm{X}_i = 2) \mid \bigcap_{j=0}^{i-1} (\mathrm{X}_j = 2)\right) = \mathrm{P}\left((\mathrm{X}_i = 2) \mid (\mathrm{X}_{i-1} = 2)\right) = \dfrac{3}{4}$

C'est **peu rigoureux**, on a utilisé l'énoncé :

« *la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n* »

De même, $\mathrm{P}\left((\mathrm{X}_k = 1) \mid \bigcap_{i=0}^{k-1} (\mathrm{X}_i = 2)\right) = \dfrac{1}{4}$

On trouve alors $\mathrm{P}(\mathrm{T} = k) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}\dfrac{1}{4}$

$$\boxed{\text{La loi de T est alors donnée par : } \mathrm{P}(\mathrm{T} = 0) = \frac{1}{2} \text{ et pour } k > 0,\ \mathrm{P}(\mathrm{T} = k) = \frac{3^{k-1}}{2 \cdot 4^k}}$$

Méthode 2 *variante* On pourrait utiliser : $\mathrm{P}_{(\mathrm{T} \geqslant n)}(\mathrm{T} > n) = \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_n = 2)}(\mathrm{X}_{n+1} = 2)$ de *façon non rigoureuse.*

Pour en déduire que $(\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant n))_{n \geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $3/4$.

On peut conclure en utilisant :

$\mathrm{P}(\mathrm{T} = n) = \mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant n) - \mathrm{P}(\mathrm{T} > n)$ et $1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant 1) = \mathrm{P}(\mathrm{T} = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = 1) = 1/2$ et $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant 0) = 1$.

Q5. On a $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^2 - {}_(\mathrm{A})\mathrm{X} + \det(\mathrm{A}) = \mathrm{X}^2 - \dfrac{5}{4}\mathrm{X} + \dfrac{1}{4} = (\mathrm{X} - 1)\left(\mathrm{X} - \dfrac{1}{4}\right)$

Comme χ_{A} est scindé à racines simples ; $\boxed{\text{la matrices A est diagonalisable}}$

$$\boxed{\text{En prenant } \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ on a bien } \mathrm{A} = \mathrm{Q}\,\mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{4}\right)\mathrm{Q}^{-1}}$$

Q6. $\boxed{\text{Les applications } \mathrm{M} \mapsto \mathrm{QMQ}^{-1} \text{ et } \mathrm{M} \mapsto \mu_0\mathrm{M} \text{ définies sur } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ sont continues}}$

car linéaire d'espace de départ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

Q7. On rappelle que les notions topologiques (en particulier convergence d'une suite) sont indépendantes du choix de la norme en dimension finie.

Par récurrence immédiate : $\mathrm{A}^n = \mathrm{Q}\,\mathrm{diag}\left(1, \dfrac{1}{4^n}\right)\mathrm{Q}^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

En utilisant la caractérisation de la limite d'une suite de matrices selon les suites des coefficients,

on a $\mathrm{diag}\left(1, \dfrac{1}{4^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{diag}\,(1, 0)$

en utilisant la continuité de l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{QMQ}^{-1}$, on obtient

$$\boxed{\text{la convergence de la suite de matrices } (\mathrm{A}^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vers } \mathrm{Q}\,\mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{4}\right)\mathrm{Q}^{-1}}$$

avec la continuité de $\mathrm{M} \mapsto \mu_0\mathrm{M}$: $\boxed{\text{la suite des vecteurs lignes } (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \mu_0\mathrm{Q}\,\mathrm{diag}\,(1, 0)\,\mathrm{Q}^{-1}}$

On a $\mathrm{Q}\,\mathrm{diag}\,(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mu_0\mathrm{Q}\,\mathrm{diag}\,(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

On trouve $\mathrm{Q}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant $\mathrm{Q}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathrm{Q})}\,{}^t(\mathrm{com}\,\mathrm{Q})$

donc $\mu_0\mathrm{Q}\,\mathrm{diag}\,(1, 0)\,\mathrm{Q}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\text{le vecteur ligne obtenu comme limite est } \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Q8. On écrit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et on a $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ ainsi $\boxed{\text{1 est bien valeur propre de A}}$

Q9. On écrit $x = {}^t(x_1 \ \cdots \ x_n)$ et on considère $k \in [\![1,p]\!]$ tel que $|x_k| = \|x\|_\infty$

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. On a $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_k| = |x_k|$

comme c'est vrai pour tout i, on conclut que $\boxed{\|\mathrm{A}x\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty}$

Q10. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A et x un vecteur colonne propre associé.

On a $\|\mathrm{A}x\|_\infty = |\lambda|\cdot\|x\|_\infty$ or $\|x\|_\infty > 0$

En utilisant la question précédente, on conclut que : $\boxed{|\lambda| \leqslant 1}$

Localisation des valeurs propres

Q11. Soit un vecteur colonne propre $y = (y_1, \ldots, y_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\mathrm{A}y = \lambda y$

comme $y \neq 0$, on peut prendre $x = \dfrac{1}{\|y\|_\infty} y$ de sorte que $\boxed{\|x\|_\infty = 1 \text{ et } \mathrm{A}x = \lambda x}$

Q12. On a $\lambda x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$

donc $|\lambda - a_{i,i}| = |(\lambda - a_{i,i})x_i| = \left|\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}|x_j| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j} = -a_{i,i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$

On a démontré que : $\boxed{|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}}$

Étude d'un exemple

Q13. On vérifie facilement que A est une matrice stochastique (signe des coefficients et sommes par ligne).

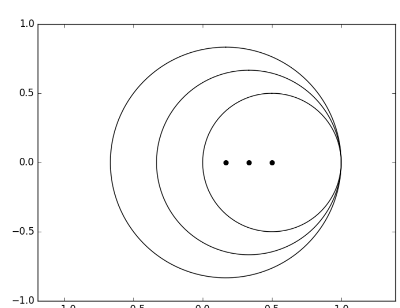
On considère λ une valeur propre complexe de A

Q11 nous fournit $x \in \mathbb{C}^3$ vecteur colonne tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $\mathrm{A}x = \lambda x$

Q12 nous fournit $i \in \{1,2,3\}$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}$

donc λ est dans la réunion des disques fermés de centres $a_{i,i}$, de rayon $1 - a_{i,i}$ avec $1 \leqslant i \leqslant p$

$\boxed{\text{le spectre de A est inclus dans la réunion de trois disques de centres : } 1/2, 1/6, 1/3 \text{ et de rayons } 1/2, 5/6, 2/3}$



Cas des matrices stochastiques strictement positives

Q14. Par l'absurde, on suppose que B' n'est pas inversible alors 0 serait valeur propre de B'.
L'inégalité admise nous fournit $i \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $|a_{i,i} - 1| \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$
Comme A est strictement positive et stochastique, on a $0 < a_{i,j} < 1$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$
donc $1 - a_{i,i} = |a_{i,i} - 1| \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$ d'où $0 < a_{i,p} \leqslant 0$ ce qui est absurde
Ainsi $\boxed{B' \text{ est inversible}}$

Q15. On suppose par l'absurde que $\dim \mathrm{Ker}(A - I_p) \neq 1$
Comme 1 est valeur propre de A, on a $\dim \mathrm{Ker}(A - I_p) \neq 0$,
On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\, B = \dim \mathrm{Ker}(A - I_p) \geqslant 2$
On en déduit que $rg B \leqslant p - 2$ car d'après le théorème du rang $\mathrm{rg}\, B + \dim \mathrm{Ker}\, B = p$
donc les $p - 1$ premières colonnes de B ont un rang inférieur à $p - 2$
donc $\mathrm{rg}(B') \leqslant p - 2$
donc B' n'est pas inversible ce qui n'est pas d'après la question précédente.
On en déduit que $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(A - I_p) = 1}$

Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

Un contre-exemple

Q16. $\boxed{\text{La matrice B de } s \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}^2 \text{ est } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Q17. Les suites extraites de matrices $\left(B^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(B^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes ;
elles convergent dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de limites respectives I_2 et B or $I_2 \neq B$
on en déduit que la suite matricielle $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
alors que B est stochastique mais non strictement positive
$\boxed{\text{La } \textbf{Proposition 2} \text{ ne reste pas vraie en général si la matrice stochastique n'est pas strictement positive}}$
Pour $p > 2$, il suffit de prendre comme contre-exemple : $\mathrm{diag}(B, 1, \ldots, 1)$

Résultat préliminaire

Q18. Comme N est nilpotente, N admet 0 comme unique valeur propre.
Donc le polynôme caractéristique (scindé dans $\mathbb{C}[X]$) est $\chi_N = X^p$
En appliquant Cayley-Hamilton, on a $\boxed{N^p = 0}$

Q19. Pour $n \geqslant k$, on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$
Si $k \geqslant 1$, le numérateur étant un produit de k facteurs tous équivalent à n ;
on en déduit que $\boxed{\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}}$ facilement vérifiable pour $k = 0$.
donc si $\lambda \neq 0$, par croissance comparée car $0 < |\lambda| < 1$:

$$\left|\binom{n}{k}\lambda^{n-k}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k|\lambda|^n}{k!|\lambda|^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

on en déduit (valable même si $\lambda = 0$) que $\boxed{\binom{n}{k}\lambda^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

Q20. Pour $n \geqslant p$, on a : $(\lambda \mathrm{I}_p + \mathrm{N})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \mathrm{N}^k$ d'après Newton car $\lambda \mathrm{I}_p$ et N commutent

d'après la question **18**, on a $(\lambda \mathrm{I}_p + \mathrm{N})^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \mathrm{N}^k$

pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(\binom{n}{k} \lambda^{n-k}\right)_{n \geqslant p}$ converge vers 0 d'après la question **19**

On en déduit par combinaison linéaires (à p termes) que

$\boxed{\text{la suite de matrices } ((\lambda \mathrm{I}_p + \mathrm{N})^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers la matrice nulle}}$

Convergence d'une suite de matrice

Q21. *Je me sers de **Q18** et **Q19** en **Q20** seule question parmi 18,19,20 que j'utilise ici.*

Le théorème de cours gentiment rappelé par l'énoncé et la **proposition 1** nous fournissent $r \in \mathbb{N}^*$, des complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ distincts deux à deux et de 1, $\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_r$ des matrices nilpotentes à coefficients complexes et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{Q}\mathrm{diag}\left(1, \lambda_1 \mathrm{I}_{p_1} + \mathrm{N}_1, \ldots, \lambda_r \mathrm{I}_{p_r} + \mathrm{N}_r\right) \mathrm{Q}^{-1}$$

donc $\mathrm{A}^n = \mathrm{Q}\mathrm{diag}\left(1, (\lambda_1 \mathrm{I}_{p_1} + \mathrm{N}_1)^n, \ldots, (\lambda_r \mathrm{I}_{p_r} + \mathrm{N}_r)^n\right) \mathrm{Q}^{-1}$ par récurrence immédiate

En utilisant **Q20**,

on obtient que pour $i \in [\![2, r]\!]$, la suite de matrices blocs $\left((\lambda_1 \mathrm{I}_{p_1} + \mathrm{N}_1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la matrice nulle donc en utilisant la caractérisation par la limite par les coefficients

$\left(\mathrm{diag}\left(1, (\lambda_1 \mathrm{I}_{p_1} + \mathrm{N}_1)^n, \ldots, (\lambda_r \mathrm{I}_{p_r} + \mathrm{N}_r)^n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{diag}(1, 0_{\mathcal{M}_{p-1}})$

En utilisant la continuité de $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{QMQ}^{-1}$ (comme en Q6 et Q7), $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{A}^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$

Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

Q22. Soit $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} = \left((x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})\right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs stochastiques de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers le vecteur $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrons que y est stochastique.

Remarque : le mot propre (sans endomorphisme) semble être une erreur d'énoncé. « propre »signifierait alors non nul. Ce qui ne change rien car "stochastique" entraîne "non nul".

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la suite de scalaire $(x_i^{(k)})$ converge vers y_i.

comme $\forall k \in \mathbb{N},\ x_i^{(k)} \geqslant 0$, on a $y_i \geqslant 0$ par passage à la limite

et comme $\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} = 1$, on a $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$ par passage à la limite

ainsi y est un vecteur stochastique de $\mathbb{R}^n$.

On a démontré par la caractérisation séquentielle que

$\boxed{\text{l'ensemble des vecteurs propres stochastiques de } \mathbb{R}^n \text{ est une partie fermée de } \mathbb{R}^n}$

Convergence de la suite

Q23. Par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_n = \mu_0 \mathrm{A}^n$

La suite (A^n) converge vers une matrice L d'après **Q21** et comme en **Q6**, l'application $\mathrm{M} \mapsto \mu_0 \mathrm{M}$ est continue ainsi comme en **Q7**, (μ_n) converge une limite $\mu_\infty = \mu_0 \mathrm{L} \in \mathbb{R}^p$.

Comme l'application linéaire $x \in \mathbb{R}^p \mapsto x\mathrm{A}$ est continue par dimension finie au départ,

la suite $(\mu_n \mathrm{A})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu_\infty \mathrm{A}$

et la suite extraite $(\mu_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ_∞

de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{n+1} = \mu_n \mathrm{A}$,

d'où $\mu_\infty = \mu_\infty \mathrm{A}$ par unicité de la limite

On a démontré que $\boxed{\text{la suite } (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un vecteur } \mu_\infty \text{ vérifiant } \mu_\infty = \mu_\infty \mathrm{A}}$

Q24. On écrit $\mu\mathrm{A} = (m'_1, \dots, m'_p)$ et $\mathrm{A} = (a_{i,j})$

On a pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $m'_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} m_k a_{k,i} \geqslant 0$ par somme et produits de réels positifs car μ est stochastique

et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} m'_i = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} m_k a_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} m_k \left(\sum_{i=1}^{p} a_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{p} m_k = 1$ car A et μ sont stochastiques

ainsi $\boxed{\mu\mathrm{A} \text{ est encore un vecteur stochastique}}$

Q25. On a μ_0 est un vecteur ligne stochastique (initialisation) et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n\mathrm{A}$ (hérédité)

Alors par récurrence immédiate, pour tout n, μ_n est un vecteur ligne stochastique.

La suite (μ_n) converge vers μ_∞, de plus selon **Q22**, l'ensemble des vecteurs stochastiques est une partie fermée donc μ_∞ est un vecteur ligne stochastique de $\mathbb{R}^p$ vérifiant $\mu_\infty = \mathrm{A}\mu_\infty$ selon **Q23**

On en déduit que $\boxed{\mu_\infty \text{ est une probabilité invariante par A}}$

Unicité de la probabilité invariante

Q26. Comme $\mu \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique, on a

μ est une probabilité invariante de A si et seulement si $\mu\mathrm{A} = \mu$

ce qui équivaut à ${}^t(\mu\mathrm{A}) = {}^t\mu$ par bijectivité de la transposition

ce qui est équivalent à $1 \cdot {}^t\mu = {}^t\mathrm{A}\,{}^t\mu$

${}^t\mu$ étant non nul, on a : $\boxed{\mu \text{ est une probabilité invariante pour A, si et seulement si le vecteur colonne } {}^t\mu \text{ est un vecteur colonne propre de } {}^t\mathrm{A} \text{ associé à la valeur propre 1}}$

Q27. En utilisant deux fois le théorème du rang, l'égalité du rang d'une matrice et de sa transposée et la question **Q15**, on a :

$$\dim \operatorname{Ker}\left({}^t\mathrm{A} - \mathrm{I}_p\right) = p - \operatorname{rg}\left({}^t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_p)\right) = p - \operatorname{rg}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_p) = \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_p) = 1$$

Ce qui justifie : $\boxed{\dim \operatorname{Ker}\left({}^t\mathrm{A} - \mathrm{I}_p\right) = 1}$

Q28. On suppose A admet $\mu = (m_1, \dots, m_p)$ et $\mu' = (m'_1, \dots, m'_p)$ comme probabilité invariante

alors ${}^t\mu$ et ${}^t(\mu')$ sont des vecteurs colonnes propres de ${}^t\mathrm{A}$ associés à la valeurs propre 1

comme $\dim \mathrm{E}_1\left({}^t\mathrm{A}\right) = \dim \operatorname{Ker}\left({}^t\mathrm{A} - \mathrm{I}_p\right) = 1$, les vecteurs ${}^t\mu$ et ${}^t(\mu')$ sont colinéaires

ce qui nous fournit $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\lambda\,{}^t\mu = {}^t(\mu')$ car μ est non nul car la somme des ses coefficients vaut 1

d'où $\lambda\mu = \mu'$ et ainsi $(\lambda m_1, \dots, \lambda m_p) = (m'_1, \dots, m'_p)$

de plus comme μ et μ' sont des vecteurs lignes stochastiques, on a $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} m'_i = \lambda \sum_{i=1}^{p} m_i = \lambda$

donc $\mu = \mu'$

On vient d'établir l'unicité et l'existence a été établie en **Q25**

On en déduit que $\boxed{\text{A admet une unique probabilité invariante}}$

Partie V - Informatique : calcul effectif de la probabilité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

Q29. $\boxed{\text{Les valeurs respectives renvoyées lorsque l'on exécute } \texttt{len(A)}, \texttt{A[1]} \text{ et } \texttt{A[2][1]} \text{ sont } \texttt{4} \,;\, \texttt{[4, 5, 6]} \text{ et } \texttt{8}}$

Q30. Une fonction `difference` :

```
def difference(x,y):
    res = []
    p=len(x)
    for i in range(p):
        res.append(x[i]-y[i])
    return res
```

Q31. Une fonction `norme` :

```
def norme(x):
    m=abs(x[0])
    p=len(x)
    for i in range(1,p):
        if abs(x[i])>m:
            m=abs(x[i])
    return m
```

Q32. Une fonction `itere` :

```
def itere(x,A):
    p=len(x)
    res=[]
    for j in range(p):
        coef=0
        for i in range(p):
            coef+=x[i]*A[i][j]
        res.append(coef)
    return res
```

Q33. Une fonction `probaInvariante` :

```
def probaInvariante(A,eps):
    p=len(A)
    u=[1/p for i in range(p)]
    v=itere(u,A)
    while norme(difference(v,u))>eps:
        u=list(v)# on fait une copie de liste
        v=itere(v,A)
    return v
```