

Probabilités - Partie 3

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \forall a \in \mathbb{R}^+, a^k \leq 1 + a^n$$

2) En déduire que si X admet un moment d'ordre n alors X admet un moment à tout ordre $k \leq n$.

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^n P(X > k) - (n+1)P(X \geq n+1)$$

2) En déduire que X possède une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} P(X > n)$ converge.

Dans ce cas, montrer que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2 (donc une espérance et une variance).

$\sigma > 0$ étant son écart type et m son espérance.

Montrer que

$$\forall \beta > 0, P(|X - m| < \beta\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\beta^2}$$

Exercice 4 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes**.

1) Supposons que X et Y suivent une même loi de géométrique de paramètre p .

Déterminer la loi de leur somme $X + Y$.

2) Supposons que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

Montrer que leur somme $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)$.

- 3) Supposons encore que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que la loi de X sachant $(X + Y = n)$ suit une loi binomiale à préciser.

Exercice 5 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes**, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q .

- 1) Déterminer $P(X > n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire la loi de la variable aléatoire $Z = \min(X, Y)$.
Justifier qu'il s'agit d'une loi géométrique.

Exercice 6 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes**, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q .

Calculer $E(Z)$, où $Z = \max(X, Y)$.

Exercice 7 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes**, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs $p > 0$ et $q > 0$.

Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 8 :

- 1) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique de paramètre p .
Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.
- 2) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ .
Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si et seulement si :

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\} \\ \forall k \geq n, P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

- 1) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une même loi géométrique de paramètre p .
Montrer que leur somme $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p .
- 2) En déduire l'espérance et la variance d'une loi binomiale négative de paramètres n et p .

Exercice 10 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $0 < p < 1$.
Supposons que :
 X suit une loi de Poisson de paramètre λ .
La loi de Y sachant ($X = n$) est binomiale de paramètres n et p .

- 1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
- 2) Quelle est alors la loi de Y ?

Exercice 11 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de (X, Y) soit comme suit :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!}$$

- 1) Déterminer la valeur de a .
- 2) Déterminer les loi marginales de X et Y ?
- 3) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = a \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

- 1) Déterminer la valeur de a .
- 2) Déterminer les loi marginales de X et Y ?
- 3) X et Y sont-elles indépendantes ?
- 4) Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 13 :

- 1) Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

- a) Calculer $E(X(X-1)\cdots(X-r+1))$.
- b) Retrouver le résultat obtenu via les fonctions génératrices.
- 2) Soient maintenant X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Calculer $E(X(X-1)\cdots(X-r+1))$.
 - b) Retrouver le résultat obtenu via les fonctions génératrices.

Exercice 14 :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Considérons une expérience aléatoire à deux issues : **succès** ou **échec**.

Notons p la probabilité de réussir ; $(1-p)$ est donc celle pour échouer)

On répète cette expérience, indépendamment, jusqu'à l'obtention de m succès.

Notons T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

- 1) Quelle est la loi de T_1 ?
- 2) Déterminer la loi de T_m .
- 3) Déterminer le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^m}$ sur $] -1, 1[$.
- 4) Déterminer la fonction génératrice de T_m .
En déduire $E(T_m)$.

Exercice 15 :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n .

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$$

Exercice 16 :

Un péage autoroutier comporte deux barrières B_1 et B_2 .

On suppose que le nombre de voitures arrivant à ce péage par jour suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Chaque voiture choisit au hasard et indépendamment des autres voitures de franchir l'une ou l'autre de ces deux barrières.

On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire déterminant le nombre de voitures franchissant la barrière B_1 (respectivement B_2) dans une journée.

- 1) Quelle est la loi de X_1 ?
- 2) En considérant la variable aléatoire $X_1 + X_2$, calculer la covariance de X_1 et X_2 .
- 3) Montrer alors que X_1 et X_2 sont indépendantes.

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \forall a \in \mathbb{R}^+, a^k \leq 1 + a^n$$

Solution

Soient $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $a \in \mathbb{R}^+$.

Montrons que : $a^k \leq 1 + a^n$

Cas 1 : Si $a \geq 1$

$$\text{On } a^k = e^{k \cdot \ln a}$$

$$\leq e^{n \ln a} \quad (\text{car } \ln a \geq 0 \text{ et } k \leq n)$$

$$= a^n$$

Ainsi $a^k \leq a^n$.

Et puisque $a^n \leq 1 + a^n$.

D'où $a^k \leq 1 + a^n$

Cas 2 : Si $0 \leq a \leq 1$

$$\text{On } a^k \leq 1$$

$$\text{Et } 1 \leq 1 + a^n$$

D'où $a^k \leq 1 + a^n$



Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \forall a \in \mathbb{R}^+, a^k \leq 1 + a^n$$

2) En déduire que si X admet un moment d'ordre n alors X admet un moment à tout ordre $k \leq n$.

Solution

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$.

Supposons que X admet un moment d'ordre n .

Montrons que X admet un moment d'ordre k .

On a $|X|^n$ admet une espérance finie.

Et on veut montrer que $|X|^k$ admet aussi une espérance finie.

D'après 1°) on a : $|X|^k \leq 1 + |X|^n$

Or 1 et $|X|^n$ admettent des espérances finies.

Alors $(1 + |X|^n)$ admet une espérance finie.

D'où $|X|^k$ admet aussi une espérance finie ; ou que toutes les deux sont des var positives.

Fin Exercice 1

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n kP(X=k) = \sum_{k=0}^n P(X > k) - (n+1)P(X \geq n+1)$$

Solution

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$P(X > k) + P(X = k) = P(X \geq k)$$

$$P(X > k) + P(X = k) = P(X \geq k-1)$$

$$\Rightarrow \forall k \geq 0, P(X = k) = P(X \geq k-1) - P(X \geq k)$$

$$\Rightarrow \forall k \geq 0, kP(X = k) = kP(X \geq k-1) - kP(X \geq k)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^n kP(X=k) = \sum_{k=0}^n kP(X \geq k-1) - \sum_{k=0}^n kP(X \geq k)$$

$$= \sum_{k=1}^n kP(X \geq k-1) - \sum_{k=0}^n kP(X \geq k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(X \geq k) - \sum_{k=0}^n kP(X \geq k)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} kP(X \geq k)}_{\text{}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} P(X \geq k)}_{\text{}} - \underbrace{\sum_{k=0}^n kP(X \geq k)}_{\text{}}$$

$$\sum_{k=0}^n kP(X=k) = \sum_{k=0}^n P(X > k) - (n+1)P(X \geq n+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$$

$$= \sum_{k=0}^n P(X > k) - P(X > n) - nP(X > n)$$

$$= \sum_{k=0}^n P(X > k) - (n+1)P(X > n)$$

$$= \sum_{k=0}^n P(X > k) - (n+1)P(X \geq n+1)$$



$$\sum_{k=0}^n kP(X=k) = \sum_{k=0}^n P(X > k) - (n+1)P(X \geq n+1)$$

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n kP(X=k) = \sum_{k=0}^n P(X > k) - (n+1)P(X \geq n+1)$$

2) En déduire que X possède une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} P(X > n)$ converge.

Dans ce cas, montrer que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Solution

2) i) Démontrons que :

$$X \text{ possède une espérance finie} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} P(X > n) \text{ converge}$$

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors :

X possède une espérance finie $\Leftrightarrow$ La série $\sum_{n \geq 0} nP(X=n)$ converge

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n kP(X=k)$$
$$S_n = \sum_{k=0}^n P(X > k)$$

On a alors :

X possède une espérance finie $\Leftrightarrow (S_n)_{n \geq 0}$ est majorée

Car c'est une série à termes positifs.

$$S_n = \sum_{k=0}^n k P(X=k)$$

$$\$ _n = \sum_{k=0}^n P(X \geq k)$$

Et on a aussi, pour la même raison, que :

$$\sum_{n \geq 0} P(X \geq n) \text{ converge} \Leftrightarrow (\$ _n)_{n \geq 0} \text{ est majorée.}$$

D'après 1°), on a : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \$ _n - (n+1) P(X \geq n+1)$

Raisonnons par double implication pour répondre à notre question :

($\Rightarrow$)

Supposons que X possède une espérance finie.

Et montrons que la série $\sum_{n \geq 0} P(X \geq n)$ converge.

C'est que $(\$ _n)_n$ est majorée.

$$X \text{ possède une espérance finie} \Leftrightarrow \text{La série } \sum_{n \geq 0} n P(X=n) \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow (S_n)_n \text{ majorée.}$$

$$S_n = \$ _n - (n+1) P(X \geq n+1)$$

Alors : $(\exists C \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq C)$

On a : $\$ _n = S_n + \underbrace{(n+1) P(X \geq n+1)}_{\leq ?}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } (n+1) P(X \geq n+1) = (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{(n+1) P(X=k)}_{\leq k}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k P(X=k)$$

$$< \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} k P(X=k)}_{=E(X)}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n \leq C + E(X)$

Et donc $(\phi_n)_n$ majorée : CQFD

($\Leftarrow$)

$$S_n = \sum_{k=0}^n k P(X=k)$$

$$\phi_n = \sum_{k=0}^n P(X > k)$$

Supposons que la série $\sum_{n \geq 0} P(X > n)$ converge.

Et montrons que X possède une espérance finie.

C'est que $(S_n)_n$ est majorée.

$$S_n = \phi_n - (n+1)P(X > n+1)$$

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \phi_n - (n+1)P(X > n+1)$$

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq \phi_n$$

Or $(\phi_n)_n$ est majorée, car la série $\sum_{n \geq 0} P(X > n)$ CV.

D'où $(S_n)_n$ est majorée. CQFD

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n kP(X=k) = \sum_{k=0}^n P(X > k) - (n+1)P(X \geq n+1)$$

2) En déduire que X possède une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} P(X > n)$ converge.

Dans ce cas, montrer que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

2) ii) Supposons maintenant que X possède une espérance.
Montrons que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

$$\text{On a : } E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

$$\text{On que : } \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \phi_n - (n+1)P(X \geq n+1)$$

$$\text{et que } \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n.$$

Alors pour finir la question, il suffit de
montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)P(X \geq n+1) = 0$

Pour $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$\begin{aligned}(n+1)P(X \geq n+1) &= (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) \\&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{(n+1)}_{\leq k} P(X=k) \\&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k P(X=k)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq (n+1)P(X \geq n+1) \leq R_n \\ \text{où : } \forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k P(X=k) \end{cases}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$, car la série $\sum_{n \geq 0} n P(X=n)$ converge

puisque X possède une espérance finie.

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)P(X \geq n+1) = 0$$

CQFD

Fin Exercice 2

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2 (donc une espérance et une variance).

$\sigma > 0$ étant son écart type et m son espérance.

Montrer que

$$\forall \beta > 0, P(|X - m| < \beta\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\beta^2}$$

Solution

Soit $\beta > 0$. Montrons que $P(|X - m| < \beta\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\beta^2}$

$$\text{On a : } P(|X - m| < \beta\sigma) = 1 - P(|X - m| \geq \beta\sigma).$$

D'autre part, on a :

$$P(|X - m| \geq \beta\sigma) = P(|X - E(X)| \geq \beta\sigma)$$

$$\leq \frac{V(X)}{\beta^2 \sigma^2} \quad (\text{d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev})$$

$$\Rightarrow P(|X - m| \geq \beta\sigma) \leq \frac{1}{\beta^2}$$

$$\text{Ainsi : } P(|X - m| < \beta\sigma) = 1 - P(|X - m| \geq \beta\sigma)$$

$$\geq 1 - \frac{1}{\beta^2}$$

Fin Exercice 3

Exercice 4 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.

1) Supposons que X et Y suivent une même loi de géométrique de paramètre p .

Déterminer la loi de leur somme $X + Y$.

Solution

On a : $X \perp Y$ (ie X et Y indépendantes)

$$X \sim G(p) \text{ et } Y \sim G(p).$$

Déterminons la loi de $S = X + Y$:

$$\text{On a } X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\text{Alors } S(\Omega) = \mathbb{N} = \{2, 3, \dots\}.$$

Soit $n \geq 2$. Déterminons $P(S=n)$.

On a :

$$P(S=n) = P(X+Y=n)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) P(Y=n-k)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car } X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \text{et } X \perp Y \end{array} \right)$$

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors il faut avoir $n-k \geq 1$; c'est-à-dire $k \leq n-1$

$$\Rightarrow P(S=n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k) P(Y=n-k)$$

$$\begin{aligned}
 P(S=n) &= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} \cdot p(1-p)^{n-k-1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car} \\ X \sim G(p) \\ \text{et } Y \sim G(p) \end{array} \right) \\
 &= p^2 \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(1-p)^{n-2}}_{\text{constante}}
 \end{aligned}$$

Enfin, la loi de $S = X + Y$ est comme suit :

$$S(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$$

$$\forall n \geq 2, P(S=n) = p^2 (n-1) (1-p)^{n-2}$$

Exercice 4 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.

1) Supposons que X et Y suivent une même loi de géométrique de paramètre p .

Déterminer la loi de leur somme $X + Y$.

2) Supposons que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

Montrer que leur somme $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)$.

Solution

$$\text{On a : } \begin{cases} X \perp Y \\ X \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } Y \sim \mathcal{P}(\mu) \end{cases}$$

$$\text{Notons } S = X + Y$$

$$\text{Montrons que } S \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

$$\text{On a } X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\text{Alors } \boxed{S(\Omega) = \mathbb{N}}.$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Montrons que } P(S=n) = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}.$$

$$\text{On a :}$$

$$P(S=n) = P(X+Y=n)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) P(Y=n-k) \left(\begin{array}{l} \text{car } X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \text{et } X \perp Y \end{array} \right)$$

On a $\gamma(\Omega) = \mathbb{N}$, alors il faut avoir $n-k \geq 0$; c'est $k \leq n$.

Ainsi :

$$P(S=n) = \sum_{k=0}^n P(X=k) P(Y=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\text{car } \begin{cases} X \sim P(\lambda) \\ Y \sim P(\mu) \end{cases}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k \mu^{n-k}$$

$$\underbrace{\quad}_{\rightarrow = (\lambda+\mu)^n}$$

Enfin on a :

$$P(S=n) = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$



Exercice 4 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes .

1) Supposons que X et Y suivent une même loi de géométrique de paramètre p .

Déterminer la loi de leur somme $X + Y$.

2) Supposons que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

Montrer que leur somme $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)$.

3) Supposons encore que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la loi de X sachant $(X + Y = n)$ suit une loi binomiale à préciser.

Solution

$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{l} X \perp\!\!\!\perp Y \\ X \sim \mathcal{P}(\lambda) \\ Y \sim \mathcal{P}(\mu) \end{array} \right. .$$

Si $(X+Y=n)$, alors $0 \leq X \leq n$.

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Déterminons $P(X=k | X+Y=n)$.

On a :

$$P(X=k | X+Y=n) = \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} .$$

$$P(X=k, X+Y=n) = P(X=k, Y=n-k)$$

$$= P(X=k) P(Y=n-k) , \text{ car } X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \quad \text{car } X \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } Y \sim \mathcal{P}(\mu) .$$

$$P(X=k, X+Y=n) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k! (n-k)!}$$

Et d'après la question 2°), on a :

$$P(X+Y=n) = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

D'où :

$$P(X=k | X+Y=n) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k! (n-k)!} \cdot e^{\lambda+\mu} \cdot \frac{n!}{(\lambda+\mu)^n}$$

$$= C_n^k \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}$$

$$= C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{n-k}$$

Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X=k | X+Y=n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{où } p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

C'est

La loi de X sachant $(X+Y=n)$ est binomiale de paramètres n et $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Fin Exercice 4

Exercice 5 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q .

1) Déterminer $P(X > n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

X et Y indépendantes.

On a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y=k) = q(1-q)^{k-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $P(X > n) = ?$

$$P(X > n) = P(X \geq n+1)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^k$$

$$= p \cdot \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X > n) = (1-p)^n$$



Exercice 5 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes**, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q .

- 1) Déterminer $P(X > n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire la loi de la variable aléatoire $Z = \min(X, Y)$.
Justifier qu'il s'agit d'une loi géométrique.

Solution

2) i) Déduisons la loi de la var $Z = \min(X, Y)$

$$\text{On a } \begin{cases} X(\Omega) = N^* \\ Y(\Omega) = N^* \end{cases} \text{ , alors } \boxed{Z(\Omega) = N^*}$$

$$\text{Soit } n \in N^*, \quad P(Z=n) = ?$$

$$(Z=n) = (\min(X, Y) = n) = ?$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\min(x, y) = n \Leftrightarrow (x=n \text{ et } y \geq n) \text{ ou } (x > n \text{ et } y=n)$$

$$\text{Ainsi } (Z=n) = (X=n, Y \geq n) \cup (X > n, Y=n)$$

D'où :

$$P(Z=n) = P\left((X=n, Y \geq n) \cup (X > n, Y=n)\right)$$

$$= P(X=n, Y \geq n) + P(X > n, Y=n)$$

événements
incompatibles

$$= \underbrace{P(X=n)}_{= (1-q)^{n-1}} \underbrace{P(Y \geq n)}_{= (1-p)^n} + \underbrace{P(X > n)}_{= (1-p)^n} \underbrace{P(Y=n)}_{\text{d'après 1°}}$$

(Car X
et Y
indép)

$$= p(1-p)^{n-1} \cdot (1-q)^{n-1} + (1-p)^n \cdot q(1-q)^{n-1}$$

$$= (1-p)^{n-1} (1-q)^{n-1} (p + q(1-p))$$

Enfin, la loi de $Z = \min(X, Y)$ est donc soit :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Z=n) = (1-p)^{n-1} (1-q)^{n-1} (p + q(1-p))$$

□

2) Justifions qu'il s'agit d'une loi géométrique

$$O_n \sim Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, O_n a :

$$\begin{aligned} P(Z=n) &= (1-p)^{n-1} (1-q)^{n-1} (p + q(1-p)) \\ &= (p + q(1-p)) [(1-p)(1-q)]^{n-1} \end{aligned}$$

?
= $h(1-h)^{n-1}$

où $h = ?$

Pour dire que :

$$Z \sim G(h)$$

$$O_n: (1-p)(1-q) = 1 - p - q + pq$$

$$= 1 - (p + q - pq)$$

$$= 1 - (p + q(1-p))$$

$$\Rightarrow P(Z=n) = (p + q(1-p)) [1 - (p + q(1-p))]^{n-1}$$

$\mathcal{L}_{n,fin} :$

$$Z_{=\min(X,Y)} \sim G(p+q(1-p))$$



Fin Exercise 5

Exercice 6 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q .

Calculer $E(Z)$, où $Z = \max(X, Y)$.

Solution

X et Y indépendantes.

On a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y=k) = q(1-q)^{k-1}$$

$$Z = \max(X, Y)$$

$$E(Z) = ?$$

Méthode1 (Standard)

On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(Z=n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(Z=n) = ?$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\max(x, y) = n \Leftrightarrow (x=n \text{ et } y \leq n) \text{ ou } (x < n \text{ et } y=n)$$

$$\text{Alors } (Z=n) = (\max(X, Y) = n)$$

$$= (X=n, Y \leq n) \cup (X < n, Y=n)$$

$$\Rightarrow P(Z=n) = P((X=n, Y \leq n) \cup (X < n, Y=n))$$

2 événements
incompatibles

$$= P(X=n, Y \leq n) + P(X < n, Y=n)$$

$$= P(X=n) P(Y \leq n) + P(X < n) P(Y=n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car } X \text{ et } Y \\ \text{indépendantes} \end{array} \right)$$

$$= p(1-p)^{n-1} \sum_{k=1}^n P(Y=k) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} P(X=k) \right) \cdot q(1-q)^{n-1}$$

$$= p(1-p)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n q(1-q)^{k-1} + q(1-q)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1}$$

$$= p(1-p)^{n-1} q \sum_{k=0}^{n-1} (1-q)^k + q(1-q)^{n-1} \cdot p \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^k$$

$$= p(1-p)^{n-1} \cancel{q} \frac{1-(1-q)^n}{\cancel{1-(1-q)}} + q(1-q)^{n-1} \cdot \cancel{p} \frac{1-(1-p)^{n-1}}{\cancel{1-(1-p)}}$$

$$= p(1-p)^{n-1} (1-(1-q)^n) + q(1-q)^{n-1} (1-(1-p)^{n-1})$$

$$= p(1-p)^{n-1} + q(1-q)^{n-1} - p(1-p)^{n-1} (1-q)^n - q(1-q)^{n-1} (1-p)^{n-1}$$

$$P(Z=n) = p(1-p)^{n-1} + q(1-q)^{n-1} - (1-p)^{n-1} (1-q)^{n-1} [p(1-q) + q]$$

$$P(Z=n) = \underbrace{p(1-p)^{n-1}}_{=P(X=n)} + \underbrace{q(1-q)^{n-1}}_{=P(Y=n)} - \underbrace{[q + p(1-q)]}_{?} \underbrace{((1-p)(1-q))}_{?}^{n-1}$$

$$\text{On a : } (1-p)(1-q) = 1 - p - q + pq = 1 - [q + p(1-q)]$$

$$\text{Ainsi: } [q + p(1-q)] \left((1-p)(1-q) \right)^{n-1} = P(T=n)$$

$$\text{ou } T \sim G(q + p(1-q))$$

$$\text{Ainsi: } P(Z=n) = P(X=n) + P(Y=n) - P(T=n)$$

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(Z=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n) + \sum_{n=1}^{+\infty} n P(Y=n) - \sum_{n=1}^{+\infty} n P(T=n)$$

$$= E(X) + E(Y) - E(T)$$

$$\underbrace{\quad}_{\rightarrow = \frac{1}{p}} \quad \underbrace{\quad}_{\rightarrow = \frac{1}{q}} \quad \underbrace{\quad}_{\rightarrow = \frac{1}{q + p(1-q)}}$$

Enfin:

$$E(Z) = E(\max(X, Y)) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q + p(1-q)}$$



Méthode 2

On utilise le résultat :

$$\text{Si } X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ alors } E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$$

$$\text{On a } Z = \max(X, Y)$$

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\text{On a : } Z(\Omega) = \mathbb{N}, \text{ avec } P(Z=0) = 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(\max(X, Y) > n) \end{aligned}$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\max(x, y) > n \iff (x > n \text{ ou } y > n)$$

Ainsi :

$$(Z > n) = (\max(X, Y) > n) = (X > n) \cup (Y > n)$$

$$\Rightarrow P(Z > n) = P((X > n) \cup (Y > n))$$

$$= P(X > n) + P(Y > n) - P((X > n) \cap (Y > n))$$

Rappel

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(Z > n) = P(X > n) + P(Y > n) - P(X > n)P(Y > n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } X \text{ et } Y \\ \text{indépendantes} \end{array} \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n) - \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)P(Y > n) \\ &= E(X) + E(Y) - \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)P(Y > n) \end{aligned}$$

$$E(Z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)P(Y > n) \quad \left(\begin{array}{l} X \sim G(p) \\ Y \sim G(q) \end{array} \right)$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X > n) &= P(X \geq n+1) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \quad \left(\text{car } X \sim G(p) \right) \\ &= p \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^k \\ &= p \cdot \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)} \end{aligned}$$

$$P(X > n) = (1-p)^n$$

De même on a $P(Y > n) = (1-q)^n$, car $Y \sim G(q)$.

Alors :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) P(Y > n) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n (1-q)^n \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)(1-q) \right)^n \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} \end{aligned}$$

Finalement on retrouve :

$$E(Z) = E(\max(X, Y)) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q + p(1-q)}$$

Fin Exercice 6

Exercice 7 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs $p > 0$ et $q > 0$.

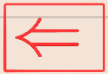
Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

Solution

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

La matrice $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R}) \iff x \neq y$

En effet:



Supposons qm. $x \neq y$.

$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et possède deux valeurs propres distinctes (x et y).

Alors elle est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.



Notons $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

Supposons qm. A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

et montrons qm. $x \neq y$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $x = y$.

Alors $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

Or $S_p(A) = \{x\}$

$$\text{Alors } A = P \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ où } P \in GL_2(\mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow A = P \cdot (x I_2) \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow A = x I_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Ce qui est absurde.

D'où $x \neq y$.

Retournons à la question principale.

La probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ est égale $P(x \neq y)$.

$$\text{On a : } X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Alors :

$$(X \neq Y) = (X=1, Y \neq 1) \cup (X=2, Y \neq 2) \cup \dots$$

$$(X \neq Y) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X=n, Y \neq n)$$

$$\Rightarrow P(X \neq Y) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X=n, Y \neq n)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n, Y \neq n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{les événements sont deux} \\ \text{à deux incompatibles} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) P(Y \neq n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } X \perp Y ; \text{ car} \\ X \text{ et } Y \text{ indépendants} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) (1 - P(Y=n))$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)}_{=1} - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n)$$

$$\rightarrow = 1$$

$$\text{Car } X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \cdot q(1-q)^{n-1}$$

$$= 1 - pq \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)(1-q))^{n-1}$$

$$= 1 - pq \sum_{n=0}^{+\infty} ((1-p)(1-q))^n$$

$$= 1 - pq \cdot \frac{1}{1 - (1-p)(1-q)}$$

et fin :

La probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable

dans $M_2(\mathbb{R})$ est égale $1 - \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)}$

Fin Exercice 7

Exercice 8 :

1) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique de paramètre p .

Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Solution

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = p(1-p)^{n-1})$

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P(X=n) \quad (\text{formule de transfert})$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} p (1-p)^{n-1}$$

$$= p(1-p)^{-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{n}}_{=?}$$

La somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = ?$

$\forall |x| < 1, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ (Dév en série entière usuelle)

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = p(1-p)^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{n}$$

$$= p(1-p)^{-1} \cdot -\ln(1-(1-p))$$

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{-p \ln p}{1-p}$$



Exercice 8 :

- 1) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique de paramètre p .
Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.
- 2) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ .
Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Solution

On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}\right)$

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X=n) \quad (\text{Formule de transfert})$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n+1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - 1 \right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1)$$

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Fin Exercice 8

Exercice 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si et seulement si :

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\}$$
$$\forall k \geq n, P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

- 1) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une même loi géométrique de paramètre p .

Montrer que leur somme $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p .

Solution

Je raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation

Pour $n=1$.

Supposons que X_1 suit une loi géométrique de paramètre p .

Vérifions que X_1 suit une loi binomiale négative de paramètres 1 et p .

$$\text{On a } X_1(\Omega) = \{1, 2, \dots\} (= \mathbb{N}^*)$$

$$\text{et : } \forall k \geq 1, P(X_1 = k) = p(1-p)^{k-1} \quad (\text{car } X_1 \sim G(p))$$

$$= \binom{k-1}{1-1} p^1 (1-p)^{k-1}$$

D'où X_1 suit une loi binomiale négative de paramètres 1 et p .

Hérédité

Soit $n \geq 2$.

Supposons que la propriété est vraie pour $(n-1)$.

Et montrons qu'elle est vraie pour n .

Soient alors $X_1, \dots, X_n$ des var indépendantes, suivant toutes une même loi géométrique de paramètre p .

Montrons que $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p .

On a $X_i(\Omega) = \{1, 2, \dots\}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

Alors $S_n(\Omega) = \{n, n+1, \dots\}$.

Soit maintenant $k \geq n$.

Montrons que $P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

On a $S_n = S_{n-1} + X_n$, où $S_{n-1} = X_1 + \dots + X_{n-1}$

Et on a que S_{n-1} et X_n sont indépendantes, car $X_1, \dots, X_{n-1}, X_n$ le sont, par indépendance héritée.

Alors :

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= P(S_{n-1} + X_n = k) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(S_{n-1} = i) P(X_n = k-i) \quad \left(\text{car } S_{n-1} \perp\!\!\!\perp X_n \right) \end{aligned}$$

On veut
ça ↓

$$P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

$X_1 + \dots + X_{n-1} = S_{n-1}$ suit une loi binomiale de paramètres $(n-1)$ et p , par hypothèse de récurrence.

$$\text{Ainsi } S_{n-1}(\Omega) = \{0, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow P(S_{n-1} = i) = 0 \text{ si } i < 0$$

$$\text{Et } X_n \sim G(p) \Rightarrow X_n(\Omega) = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$$

$$\text{Alors } P(X_n = k-i) = 0 \text{ si } k-i < 1, \text{ c'est-à-dire } i > k-1$$

D'où, et vu que $n-1 \leq k-1$, on a :

$$P(S_n = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(S_{n-1} = i) P(X_n = k-i)$$

$$= \sum_{i=n-1}^{k-1} P(S_{n-1} = i) P(X_n = k-i)$$

$$= \sum_{i=n-1}^{k-1} \binom{i-1}{n-2} p^{n-1} (1-p)^{i-(n-2)} \cdot p(1-p)^{k-i-1}$$

$$= \sum_{i=n-1}^{k-1} \binom{i-1}{n-2} p^n (1-p)^{k-n}$$

$$= p^n (1-p)^{k-n} \sum_{i=n-1}^{k-1} \binom{i-1}{n-2}$$

Pour finir, il suffit de vérifier que

$$\sum_{i=n-1}^{k-1} \binom{i-1}{n-2} = \binom{k-1}{n-1}$$

On veut
ça ↓

$$P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

On pense à une simplification télescopique, via la formule de Pascal.

Rappel: $\binom{j}{t} + \binom{j}{t+1} = \binom{j+1}{t+1}$, c'ad $\binom{j}{t} = \binom{j+1}{t+1} - \binom{j}{t+1}$

On a:

$$\sum_{i=n-1}^{k-1} \binom{i-1}{n-2} = \sum_{i=n-1}^{k-1} \left(\binom{i}{n-1} - \binom{i-1}{n-1} \right)$$

$$= -\binom{n-2}{n-1} + \binom{k-1}{n-1} \quad (\text{télescopage})$$

$\searrow = 0$ car $n-2 < n-1$

$$= \binom{k-1}{n-1}$$

CQFD



Exercice 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si et seulement si :

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\}$$

$$\forall k \geq n, P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

- 1) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une même loi géométrique de paramètre p .
Montrer que leur somme $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p .
- 2) En déduire l'espérance et la variance d'une loi binomiale négative de paramètres n et p .

Solution

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var indépendantes, suivant toutes une même loi géométrique de paramètre p .

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ est une var suivant une loi binomiale négative.

On a :

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \quad (\text{linéarité de l'espérance})$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \quad (\text{car } X_i \sim G(p))$$

$$E(S_n) = \frac{n}{p}$$



$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) \left(\text{car } X_1, \dots, X_n \text{ indépendantes} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1-p}{p^2} \left(\text{car } X_i \sim G(p) \right)$$

$$V(S_n) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$



Fin Exercice 9

Exercice 10 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $0 < p < 1$.
Supposons que :

X suit une loi de Poisson de paramètre λ .

La loi de Y sachant $(X = n)$ est binomiale de paramètres n et p .

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .

Solution

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $P(X=i, Y=j) = ?$

On a pour hypothèses que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, P(Y=k | X=n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=i, Y=j) = P(Y=j, X=i)$$

$$P(A \cap B) =$$

$$P(A|B) \cdot P(B)$$

Rappel

$$= P(Y=j | X=i) \times P(X=i)$$

$$= C_i^j p^j (1-p)^{i-j} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X=i, Y=j) = e^{-\lambda} C_i^j p^j (1-p)^{i-j} \frac{\lambda^i}{i!}$$

Exercice 10 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $0 < p < 1$.

Supposons que :

X suit une loi de Poisson de paramètre λ .

La loi de Y sachant $(X = n)$ est binomiale de paramètres n et p .

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .

2) Quelle est alors la loi de Y ?

Solution

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $P(Y=n) = ?$

On a :

$$P(Y=n) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i, Y=n)$$

d'après la formule des probabilités totales et vu que $(X=i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda} C_i^n p^n (1-p)^{i-n} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= \sum_{i=n}^{+\infty} e^{-\lambda} C_i^n p^n (1-p)^{i-n} \frac{\lambda^i}{i!} \quad (\text{Car } \forall i < n, C_i^n = 0)$$

$$= e^{-\lambda} p^n \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{i!}{n!(i-n)!} (1-p)^{i-n} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{p^n}{n!} \cdot \sum_{i=n}^{+\infty} (1-p)^{i-n} \frac{\lambda^i}{(i-n)!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{p^n}{n!} \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^i \frac{\lambda^{i+n}}{i!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{p^n}{n!} \cdot \lambda^n \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= e^{\lambda(1-p)}}$

$$= \underbrace{e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda(1-p)}}_{= e^{-\lambda p}} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!}$$

Ainsi :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y=n) = e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!}$$

Câd :

$$Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$$

Fin Exercise 10

Exercice 11 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de (X, Y) soit comme suit :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!}$$

1) Déterminer la valeur de a .

Solution

On a que la famille $\left(P(X=i, Y=j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et sa somme est égale à 1.

$$\text{On a : } 1 = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} P(X=i, Y=j)$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} P(X=i, Y=j) \right)$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{i!j!} \right)$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \right)$$

$\underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}}_{= e^1 = e}$

$$\Rightarrow 1 = e \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a}{i!}$$

$$\Rightarrow 1 = e \cdot a \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}}_{= e^1 = e}$$

$$\Rightarrow 1 = e^2 \cdot a$$

$\mathcal{L}_{\text{fin}}:$

$$a = e^{-2}$$



Exercice 11 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de (X, Y) soit comme suit :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!}$$

- 1) Déterminer la valeur de a .
- 2) Déterminer les lois marginales de X et Y ?

Solution

2) i) Déterminons la loi de X

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = ?$

$$P(X=n) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=n, Y=j) \quad \left(\begin{array}{l} \text{via la formule des probabilités totales.} \\ \text{Car } Y(\Omega) = \mathbb{N}, \text{ et donc } (Y=j) \text{ est comp. d'évén} \end{array} \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{n!j!} \quad (a = e^{-2})$$

$$= \frac{e^{-2}}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}}_{=e}$$

D'où :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \frac{e^{-1}}{n!}$$

C'est

$$X \sim \mathcal{P}(1)$$



2)ii) Déterminons la loi de Y

On trouve de même que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y=n) = \frac{e^{-1}}{n!}$$

C'est

$$Y \sim \mathcal{P}(1)$$



Exercice 11 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de (X, Y) soit comme suit :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!}$$

- 1) Déterminer la valeur de a .
- 2) Déterminer les loi marginales de X et Y ?
- 3) X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Alors X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow (\forall i, j \in \mathbb{N}, P(X=i, Y=j) = P(X=i) P(Y=j))$

Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{cases} P(X=i, Y=j) = \frac{e^{-2}}{i!j!} \\ P(X=i) P(Y=j) = \frac{e^{-1}}{i!} \times \frac{e^{-1}}{j!} \end{cases}$$

$$\text{Donc } P(X=i, Y=j) = P(X=i) P(Y=j).$$

Ainsi :

X et Y sont indépendantes

Fin Exercice 11

Exercice 12 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = a \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

1) Déterminer la valeur de a .

Solution

On a que la famille $\left(P(X=i, Y=j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et sa somme est égale à 1.

$$\text{On a : } 1 = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} P(X=i, Y=j)$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

$$\Rightarrow 1 = a \cdot \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

Considérons la partition $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$, définie par :

$$I_n = \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j=n \right\}$$

$$\text{On a : } \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(i,j) \in I_n} \frac{i+j}{2^{i+j}} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(i,j) \in I_n} \frac{n}{2^n} \right) \left(\begin{array}{l} \text{Car} \\ \forall (i,j) \in I_n, i+j=n \end{array} \right)$$

$\searrow \frac{n}{2^n} \times \underbrace{\text{Card}(I_n)}_{=(n+1)} = \frac{n(n+1)}{2^n}$

Alors :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

$$1 = a \cdot \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = ?$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ça laisse penser à la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)x^n$.

$$\text{On a : } \forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)'' = \left(\frac{1}{1-x}\right)''$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1,1[, \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = 8$$

et on a voit :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

$$1 = a \cdot \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

On finit :

$$a = \frac{1}{8}$$



Exercice 12 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = a \frac{i + j}{2^{i+j}}$$

1) Déterminer la valeur de a .

2) Déterminer les lois marginales de X et Y ?

$$a = \frac{1}{8}$$

Solution

2) i) Déterminons la loi de X

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = ?$

$$P(X=n) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=n, Y=i) \quad \left(\begin{array}{l} \text{via la formule des probabilités totales.} \\ \text{Car } Y(\Omega) = \mathbb{N}, \text{ et donc } (Y=j) \text{ est comp. d'évén.} \\ j \in \mathbb{N} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} a \frac{n+i}{2^{n+i}} \quad \left(a = \frac{1}{8} \right)$$

$$= \frac{a}{2^n} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{n+i}{2^i}$$

$$P(X=n) = \frac{a}{2^n} \left(n \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^i + \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i \right)$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i = ?$$

Ça laisse penser à la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$.

$$\text{On a : } \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ainsi :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i = \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{2} \right)^i$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1}}_{\rightarrow = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4} = 2$$

$$P(X=n) = \frac{a}{2^n} \left(n \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^i + \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i \right)$$

$$= \frac{8}{2^n} (2n + 2)$$

Donc enfin :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \frac{16(n+1)}{2^n}$$



2)ii) Déterminons la loi de Y

On trouve de même que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y=n) = \frac{16(n+1)}{2^n}$$



Exercice 12 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = a \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

- 1) Déterminer la valeur de a .
- 2) Déterminer les lois marginales de X et Y ?
- 3) X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Alors X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow (\forall i, j \in \mathbb{N}, P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j))$

Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{cases} P(X=i, Y=j) = \frac{1}{8} \frac{i+j}{2^{i+j}} \\ P(X=i)P(Y=j) = \frac{16(i+1)}{2^i} \times \frac{16(j+1)}{2^j} = \frac{16^2 (i+1)(j+1)}{2^{i+j}} \end{cases}$$

On a en particulier

$$P(X=0, Y=0) \neq P(X=0)P(Y=0)$$

Donc

X et Y ne sont pas indépendantes



Exercice 12 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = a \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

- 1) Déterminer la valeur de a .
- 2) Déterminer les loi marginales de X et Y ?
- 3) X et Y sont-elles indépendantes ?
- 4) Calculer $P(X = Y)$.

Solution

Calculons $P(X=Y)$.

$$\text{On a } X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Alors :

$$(X=Y) = (X=0, Y=0) \cup (X=1, Y=1) \cup \dots$$

$$\Rightarrow (X=Y) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X=n, Y=n)$$

$$\Rightarrow P(X=Y) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X=n, Y=n)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n, Y=n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car les événements } (X=n, Y=n) \text{ sont} \\ \text{deux à deux incompatibles} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot \frac{2n}{2^n}$$

$$a = \frac{1}{8}$$

$$P(X=Y) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On avait trouvé plus-haut que :

$$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Alors :

$$P(X=Y) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2}$$

Donc fin :

$$P(X=Y) = \frac{1}{9}$$

Fin Exercice 12

Exercice 13 :

1) Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $E(X(X-1)\cdots(X-r+1))$.

On a $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$$

Calculons $E(X(X-1)\cdots(X-r+1))$.

$$E(X(X-1)\cdots(X-r+1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) P(X=n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Formule de} \\ \text{transfert} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$E(X(X-1)\cdots(X-r+1)) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(e^x)^{(r)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)^{(r)}$$

$$(e^x)^{(r)} = \sum_{n=r}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)^{(r)} \quad \left(\text{car } \left(\frac{x^n}{n!} \right)^{(r)} = 0 \text{ si } n < r \right)$$

$$\left(\frac{x^n}{n!} \right)^{(r)} = n(n-1)\cdots(n-r+1) \frac{x^{n-r}}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) \frac{x^{n-r}}{n!}$$

$$E(X(X-1)\cdots(X-r+1)) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^n}{n!} \right)^{(1)} &= n x^{n-1} \\ \left(\frac{x^n}{n!} \right)^{(2)} &= n(n-1) x^{n-2} \\ &\vdots \\ \left(\frac{x^n}{n!} \right)^{(r)} &= n(n-1)\cdots(n-r+1) x^{n-r} \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^r \cdot \underbrace{\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-r+1) \cdot \frac{\lambda^{n-r}}{n!}}_{= e^{\lambda}}$$

Confin:

$$E(X(X-1) \dots (X-r+1)) = \lambda^r$$

Exercice 13 :

- 1) Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
- a) Calculer $E(X(X-1)\cdots(X-r+1))$.
- b) Retrouver le résultat obtenu via les fonctions génératrices.

$$\text{On a : } \forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, G_X^{(r)}(t) = \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) P(X=n) t^{n-r}$$

$$\Rightarrow G_X^{(r)}(1) = \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) P(X=n)$$

Or on a :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) P(X=n) = E(X(X-1)\cdots(X-r+1)) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Formule du} \\ \text{transfert} \end{array} \right)$$

$$\text{Alors } E(X(X-1)\cdots(X-r+1)) = G_X^{(r)}(1)$$

$$\text{D'autre part : } \forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, G_X^{(r)}(t) = \lambda^r e^{\lambda(t-1)}$$

$$\Rightarrow G_X^{(r)}(1) = \lambda^r$$

Enfin :

$$E(X(X-1)\cdots(X-r+1)) = \lambda^r$$

2) Soient maintenant X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $E(X(X-1)\dots(X-r+1))$.

On a $X \sim G(p)$, alors

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$$

Calculons $E(X(X-1)\dots(X-r+1))$.

$$E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-r+1) P(X=n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Formule de} \\ \text{transfert} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-r+1) P(X=n)$$

$$= \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-r+1) \cdot p(1-p)^{n-1}$$

$$E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = p \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-r+1) \cdot (1-p)^{n-1}$$

On peut à la somme de la série entière : $\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-r+1) x^{n-1}$

$$\text{On a : } \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)^{(r)} = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(r)}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=r}^{+\infty} (x^n)^{(r)} = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(r)} \quad \left(\text{car } (x^n)^{(r)} = 0 \text{ si } n < r \right)$$

$$\text{On a } (x^n)^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) x^{n-r}$$

$$\text{of } \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(r)} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}, \text{ alors:}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-r+1) x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} E(X(X-1) \dots (X-r+1)) &= p \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-r+1) \cdot (1-p)^{n-1} \\ &= p (1-p)^{r-1} \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-r+1) \cdot (1-p)^{n-r} \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\rightarrow = \frac{r!}{(1-(1-p))^{r+1}} = \frac{r!}{p^{r+1}}} \\ &= p (1-p)^{r-1} \cdot \frac{r!}{p^{r+1}} \end{aligned}$$

$$E(X(X-1) \dots (X-r+1)) = \frac{r! (1-p)^{r-1}}{p^r}$$



2) Soient maintenant X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $E(X(X-1) \cdots (X-r+1))$.

b) Retrouver le résultat obtenu via les fonctions génératrices.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car $X \sim G(p)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } G_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) t^n \quad (=E(t^X)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n \\ &= p(1-p)^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)t)^n \quad \left(\text{Somme d'une} \right) \end{aligned}$$

La somme de cette série géométrique converge quand $|((1-p)t)| < 1$.

Càd si $t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$.

Ainsi, on a la somme de la série entière suivante:

$$\forall t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[, G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) t^n$$

$$\Rightarrow \forall t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[, G_X^{(r)}(t) = \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-r+1) P(X=n) t^{n-r}$$

Or $1 \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$, alors :

$$G_X^{(r)}(1) = \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-r+1) P(X=n)$$

Or on a :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-r+1) P(X=n) = E(X(X-1) \cdots (X-r+1)) \quad \left(\text{Formule du transfert} \right)$$

Alors $E(X(X-1) \dots (X-r+1)) = G_X^{(r)}(1)$

2^e autre part: $\forall t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$, $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$

$\Rightarrow \forall t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$, $G_X^{(r)}(t) = \left(\frac{pt}{1-(1-p)t} \right)^{(r)}$

Et on a :

$$\left(\frac{pt}{1-(1-p)t} \right)^{(r)} = \frac{p}{1-p} \cdot \left(\frac{(1-p)t}{1-(1-p)t} \right)^{(r)}$$

$$\Rightarrow = \frac{-p}{1-p} \left(\frac{-(1-p)t}{1-(1-p)t} \right)^{(r)}$$

$$= \frac{-p}{1-p} \left(\frac{-1+1-(1-p)t}{1-(1-p)t} \right)^{(r)}$$

$$= \frac{-p}{1-p} \left(\frac{-1}{1-(1-p)t} + 1 \right)^{(r)}$$

$$= \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1-(1-p)t} \right)^{(r)}$$

$$= \frac{p}{1-p} \left((1-(1-p)t)^{-1} \right)^{(r)}$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{r! (1-p)^r}{(1-(1-p)t)^{r+1}}$$

2^{im} :

$$\forall t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[, G_x^{(n)}(t) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n! (1-p)^n}{(1-(1-p)t)^{n+1}}$$

En particulier pour $t=1$, on a :

$$G_x^{(n)}(1) = \frac{p \cdot n! (1-p)^n}{(1-p) \cdot p^{n+1}}$$

$$G_x^{(n)}(1) = \frac{n! (1-p)^{n-1}}{p^n}$$

$$\text{Or } E(X(X-1) \dots (X-n+1)) = G_x^{(n)}(1)$$

Alors on a retrouvé :

$$E(X(X-1) \dots (X-n+1)) = \frac{n! (1-p)^{n-1}}{p^n}$$



Fin Exercise 13

Exercice 15 :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n .

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$$

CORRECTION

Soit $\varepsilon > 0$.

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$.

$\forall i \in \mathbb{N}$, $X_i \sim B(p_i)$, alors $E(X_i) = p_i$

$$\begin{aligned} \text{Alors } E \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} \right| < \varepsilon \right) &= P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - E \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) \right| < \varepsilon \right) \\ &= 1 - P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - E \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) \right| \geq \varepsilon \right) \end{aligned}$$

Alors pour répondre à la question demandée, il suffit

de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - E \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - E \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{V \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right)}{\varepsilon^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{l'inégalité} \\ \text{de} \\ \text{B-Tcheb} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} V \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)$$

$$= \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \cdot \sum_{i=1}^n V(X_i) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car les } X_i \\ \text{sont indépendantes} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) \quad \left(\begin{array}{l} \forall i, V(X_i) = p_i(1-p_i) \\ \text{car } X_i \sim B(p_i) \end{array} \right)$$

Or $\forall i, 0 < p_i < 1$ et $0 < 1-p_i < 1$

$$\text{Ainsi } \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) \leq \sum_{i=1}^n 1 = n$$

$$\text{Donc : } 0 \leq P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - E \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n \varepsilon^2}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \varepsilon^2} = 0$$

Also on a infin'.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - E \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) \right| \geq \epsilon \right) = 0$$



Fin Exercise 15

FIN

