Autour de l'inégalité de Hoffman-Wielandt

A Un exemple

1. En notant la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{J} = \mathrm{M}_\sigma$

   donc $\boxed{\text{J est une matrice de permutation}}$

   On développe le polynôme caractéristique de J par rapport à la première colonne pour obtenir :

$$\chi_{\mathrm{J}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{X} & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}_{[n]} = \mathrm{X} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{X} & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}_{[n-1]} - (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mathrm{X} & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

   Ce qui permet de conclure que $\boxed{\chi_{\mathrm{J}} = \mathrm{X}^n - 1 \text{ et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{J}) = \mathbb{U}_n}$

   comme $\mathrm{J} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres complexes, on en déduit que $\boxed{\text{J est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

2. Soit $\omega = \exp(2\mathrm{i}k\pi/n)$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$. On identifie canoniquement $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\text{On a pour } \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \mathrm{X} \in \mathrm{E}_\omega(\mathrm{J}) \iff \begin{cases} x_2 = \omega x_1 \\ x_3 = \omega x_2 \\ \quad\ddots \quad = \vdots \\ x_n = \omega x_{n-1} \\ x_1 = \omega x_n \end{cases}$$

   Ainsi $\mathrm{E}_\omega(\mathrm{J}) = \mathrm{vect}((1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}))$ car $\omega^n = 1$

   et comme $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\omega \in \mathbb{U}_n} \mathrm{E}_\omega(\mathrm{J})$ car J est diagonalisable

   $\boxed{\text{En notant } e_\omega = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \text{ alors } \left(e_{\exp(2\mathrm{i}k\pi/n)}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \text{ est une base de vecteur propre de J}}$

   $\boxed{\text{où } e_\omega \text{ est associé à la valeur propre } \omega \in \mathbb{U}_n}$

3. On a $\boxed{\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

   Soit $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

   $((\mathrm{X}_m = i))_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilité totale :

   Si $k \in [\![1, n-2]\!]$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{m+1} = k) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}_{m+1} = k \mid \mathrm{X}_m = i)\mathrm{P}(\mathrm{X}_m = i)$

   donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{m+1} = k) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_{m+1} = k \mid \mathrm{X}_m = k-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_m = k-1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_{m+1} = k \mid \mathrm{X}_m = k+1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_m = k+1)$

   ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{m+1} = k) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_m = k-1) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_m = k+1)$

   et si $k = 0$ on a $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{m+1} = 0) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_m = n-1) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_m = 1)$

   et si $k = n-1$ on a $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{m+1} = n-1) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_m = n-2) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_m = 0)$

   $\boxed{\text{En prenant } \mathrm{A} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{J} + {}^t\mathrm{J}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ on a pour tout } m \in \mathbb{N},\ \mathrm{U}_{m+1} = \mathrm{AU}_m}$

4. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable via une base orthonormale.

Je reprends les notations de 1. pour σ. et je note $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ avec l'identification usuelle à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Pour s permutation de $[\![1,n]\!]$, $\mathrm{M}_s\varepsilon_k = \varepsilon_{s(k)}$ ainsi l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée M_s envoie la base $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sur la base $(\varepsilon_{s(k)})_{1\leqslant k\leqslant n}$
Ces deux bases étant orthonormées pour la structure euclidienne usuelle, on a donc $\mathrm{M}_s \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour toutes permutations s.
Comme $\mathrm{J} = \mathrm{M}_\sigma \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{J} = \mathrm{I}_n$ et ${}^t\mathrm{J} = \mathrm{J}^{-1}$
En reprenant les notations de 2. on a pour $\omega \in \mathbb{U}_n$:

$$\mathrm{J}e_\omega = \omega e_\omega \text{ et donc } {}^t\mathrm{J}e_\omega = \mathrm{J}^{-1}e_\omega = \omega^{-1}e_\omega = \overline{\omega}e_\omega \text{ car } \omega \in \mathbb{U}_n$$

donc

$$\mathrm{A}e_\omega = \frac{1}{2}(\mathrm{J} + {}^t\mathrm{J})e_\omega = \mathrm{Re}\,(\omega)e_\omega \text{ et } \mathrm{Re}\,(\omega) \in \mathbb{R}\cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$$

On a aussi $\mathrm{Re}\,(e_\omega)$ et $\mathrm{Im}\,(e_\omega) \in \mathrm{E}_{\mathrm{Re}\,(\omega)}(\mathrm{A})$ où $\mathrm{Re}\,(e_\omega)$ et $\mathrm{Im}\,(e_\omega) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Re}\,(e_\omega) + \mathrm{i}\mathrm{Im}\,(e_\omega) = e_\omega$
On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{J}) = \mathbb{U}_n$ et donc $\mathbb{R}\cap\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{J}) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{J}) = \{1\}$ car n est impair
si $\omega = 1$ alors on trouve $e_1 = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$ comme vecteur propre de J associé à la valeur propre 1
Si $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \mathbb{R}$, alors on peut écrire $\omega = \exp(2\mathrm{i}k\pi/n)$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$
cela nous donne comme vecteurs de $\mathrm{E}_\omega(\mathrm{A})$: $f_k = \mathrm{Re}\,(e_\omega)$ et $g_k = \mathrm{Im}\,(e_\omega)$ où

$$f_k = (1, \cos(2k\pi/n), \cos(4k\pi/n), \ldots \cos((n-1)k\pi/n)) \in \mathbb{R}^n,$$
$$g_k = (0, \sin(2k\pi/n), \sin(4k\pi/n), \ldots \sin((n-1)k\pi/n)) \in \mathbb{R}^n$$

Pour $k \in [\![1,(n-1)/2]\!]$, on a $0 < 2k\pi/n < \pi$ nous avons donc deux vecteurs propres de J non colinéaires associés à la valeur propre $\lambda_k = \mathrm{Re}\,(\exp(2\mathrm{i}k\pi/n)) = \cos(2k\pi/n) \in \mathbb{R}$
Lorsque k parcourt $[\![1,(n-1)/2]\!]$, $2k\pi/n$ décrit k des valeurs distincts de $]0,\pi[$ et la fonction cos est strictement décroissante sur $]0,\pi[$
donc les $\lambda_k = \cos(2k\pi/n)$ sont des réels distincts deux à deux lorsque k parcourt $[\![0,(n-1)/2]\!]$
On peut donc revenir dans $\mathbb{R}^n$.
Si $k = 0$, on a $\mathrm{E}_{\lambda_0}(\mathrm{A}) \supset \mathrm{vect}(e_1) = \mathrm{vect}(f_0)$ et donc $\dim(\mathrm{E}_{\lambda_0}(\mathrm{A})) \geqslant 1$
et pour $k \in [\![1,(n-1)/2]\!]$, on a $\mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A}) \supset \mathrm{vect}(f_k, g_k)$ et donc $\dim(\mathrm{E}_{\lambda_0}(\mathrm{A})) \geqslant 2$

comme les espaces propres sont en somme direct on a $\mathbb{R}^n \supset \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{(n-1)/2} \mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A})$

On a $\dim\mathbb{R}^n = n$ et $\dim\left(\displaystyle\bigoplus_{k=0}^{(n-1)/2} \mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A})\right) = \dim(\mathrm{E}_{\lambda_0}(\mathrm{A})) + \displaystyle\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \dim(\mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A})) \geqslant 1 + 2\times\frac{n-1}{2} = n$

Donc on a $\mathbb{R}^n = \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{(n-1)/2} \mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A})$ et $\boxed{\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\cos(2k\pi/n)\ /\ 0 \leqslant k \leqslant (n-1)/2\}}$
La plus grande valeur propre est $\lambda_0 = 1$

$\boxed{\text{Un vecteur propre de A unitaire associé à la valeur propre de module maximal est } \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n}$

5. On peut écrire $\mathrm{U}_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)} h_k$ où $h_k \in \mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A})$. Soit $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{U}_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)} \lambda_k^m h_k$
comme $\lambda_0 = 1$ et si $1 \leqslant k \leqslant (n-1)/2$, $|\lambda_k| < 1$ On a $\mathrm{U}_m \to h_0$ lorsque $m \to +\infty$
Comme $\mathbb{R}^n = \displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{0\leqslant k\leqslant (n-1)/2}} \mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A})$ d'après le théorème spectral, h_0 est le projeté orthogonal de U_0 sur $\mathrm{E}_{\lambda_0}(\mathrm{A})$
En notant $v = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1)$, on a donc $h_0 = \langle v, \mathrm{U}_0\rangle v$, on en déduit $\boxed{\mathrm{U}_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} (1/n,\ldots,1/n)}$

B Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6. • Soit A et B $\in \mathcal{B}_n$. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $C = \lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{B}_n$.
   Pour $i,k \in [\![1,n]\!]$, on a $C_{i,k} = \lambda A_{i,k} + (1-\lambda)B_{i,k} \geqslant 0$ car $[0,1]$ convexe
   et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} C_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} B_{i,j} = 1$ et de même $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} C_{j,i} = 1$
   On a bien $C \in \mathcal{B}_n$, on a montré que $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est convexe}}$
   • On considère les applications $\varphi_i : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\varphi'_i : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{j,i} \in \mathbb{R}$ et
   $\psi_{i,k} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{j,i} \in \mathbb{R}$
   Ces applications sont continues car linéaires et définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dimension finie et de plus les notions topologiques ne dépendent pas du choix de la norme.
   On a $\mathcal{B}_n = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i'^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{1\leqslant i,k\leqslant n} \psi_{i,k}^{-1}(\mathbb{R}^+)\right)$
   Comme $\{1\}$ et $\mathbb{R}^+$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par intersection des fermés
   De plus l'application $N : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\max_{1\leqslant i,k\leqslant n} |M_{i,k}| \in \mathbb{R}$ est une norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   Ainsi $\forall M \in \mathcal{B}_n$, $N(M) \leqslant 1$ donc $\mathcal{B}_n$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace de dimension finie et comme $\mathcal{B}_n$ est aussi fermée $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est une partie compacte}}$
   • la matrice nulle n'est pas bistochastique car la somme sur une rangée est nulle
   Ainsi $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ n'est pas un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
7. • Soit $A \in \mathcal{P}_n$. On écrit $A = M_\sigma$ où σ est une permutation.
   Pour tout $i,k \in [\![1,n]\!]$, on a $A_{i,k} \geqslant 0$ car 0 et $1 \in \mathbb{R}^+$
   de plus $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = M_{\sigma^{-1}(i),j} + 0 = 1$ et de même $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{j,i} = 1$
   donc $M \in \mathcal{B}_n$. On a montré $\boxed{\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n}$
   • On considère σ et σ' deux permutations de $[\![1,n]\!]$.
   D'après ce qui a été fait en 4. sur les matrice de premutations, on a $M_{\sigma'}M_\sigma\varepsilon_k = \varepsilon_{\sigma'\circ\sigma(k)}$ ainsi l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé $M_{\sigma'}M_\sigma$ envoie la base $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sur la base $(\varepsilon_{\sigma'\circ\sigma(k)})_{1\leqslant k\leqslant n}$
   On note S_n le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$ et on a
   $$\forall \sigma,\sigma' \in S_n,\ M_\sigma \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } M_{\sigma'} \times M_\sigma = M_{\sigma'\circ\sigma}$$
   Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, l'application $\psi_n : \left\{\begin{array}{ccc} S_n & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & M_\sigma \end{array}\right.$ est bien définie et il s'agit aussi d'un morphisme de groupes
   De plus $\mathrm{Im}(\psi_n) = \mathcal{P}_n$ donc $\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est un sous-groupe multiplicatif de } GL_n(R)}$
   • Soit $A = M_\sigma \in \mathcal{P}_n$. On note w l'ordre de σ dans S_n.
   En utilisant le morphisme précédent, on a $A^w = I_n$
   donc $X^w - 1$ est un polynôme annulateur de A or ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$
   donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On a montré que $\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{P}_n \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

- On a J et ${}^t\mathrm{J} \in \mathcal{P}_n$ et $\frac{1}{2}\mathrm{J} + \frac{1}{2}\,{}^t\mathrm{J} \notin \mathcal{P}_n$ car $\frac{1}{2} \notin \{0,1\}$ en ayant pris J est la matrice de la partie A.

  Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{P}_n \text{ n'est pas convexe}}$

8. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_n$. Soit M, N dans $\mathcal{B}_n$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que $\mathrm{A} = \lambda\mathrm{M} + (1-\lambda)\mathrm{N}$. Montrons $\mathrm{A} = \mathrm{M} = \mathrm{N}$.
   Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$. On a $\mathrm{A}_{i,j} = \lambda\mathrm{M}_{i,j} + (1-\lambda)\mathrm{N}_{i,j}$
   Comme M, N dans $\mathcal{B}_n$, on a $\mathrm{M}_{i,j}$ et $\mathrm{N}_{i,j} \in [0,1]$ et $\lambda > 0$ et $1-\lambda > 0$
   Si on a $\mathrm{A}_{i,j} = 0$, alors $0 = \lambda\mathrm{M}_{i,j} + (1-\lambda)\mathrm{N}_{i,j}$ donc nécessairement $\mathrm{M}_{i,j} = \mathrm{N}_{i,j} = 0$
   Sinon on a $\mathrm{A}_{i,j} = 1$, on a $1 = \lambda\mathrm{M}_{i,j} + (1-\lambda)\mathrm{N}_{i,j}$ donc nécessairement $\mathrm{M}_{i,j} = \mathrm{N}_{i,j} = 1$
   On utilisé le fait que 0 et 1 sont extrémaux dans $[0,1]$
   On a bien montré que $\boxed{\text{toute matrice de } \mathcal{P}_n \text{ est extrémale dans } \mathcal{B}_n}$

9. <u>étape 1 :</u> On va construire par récurrence deux suites $(i_m)_{m\geqslant 1}$ et $(j_m)_{m\geqslant 1}$ telles que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{A}_{i_m,j_m} \in]0,1[\text{ et } \ \mathrm{A}_{i_m,j_{m+1}} \in]0,1[\text{ et } \ i_m \neq i_{m+1} \text{ et } \quad j_m \neq j_{m+1}$$

On remarque si $\mathrm{A} \in \mathcal{B}_n$ et $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{A}_{i,j} \in \{0,1\}$ alors il y a exactement une occurrence de 1 et $n-1$ occurrences de 0 par ligne et par colonne. Dans ce cas, il existe une unique permutation σ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{M}_\sigma$
Comme $\mathrm{A} \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{P}_n$, ceci nous fournit i_1, j_1 tels que $\mathrm{A}_{i_1,j_1} \in]0,1[$ (par contraposée).

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On suppose construit $(i_m)_{1\leqslant m\leqslant \mathrm{N}}$ et $(j_m)_{1\leqslant m\leqslant \mathrm{N}}$ telles que : $\begin{cases} \forall m \in [\![1,\mathrm{N}]\!],\ \mathrm{A}_{i_m,j_m} \in]0,1[\\ \forall m \in [\![1,\mathrm{N}-1]\!],\ \mathrm{A}_{i_m,j_{m+1}} \in]0,1[\\ \forall m \in [\![1,\mathrm{N}-1]\!],\ i_m \neq i_{m+1} \\ \forall m \in [\![1,\mathrm{N}-1]\!],\ j_m \neq j_{m+1} \end{cases}$

On vient d'effectuer cette construction pour $\mathrm{N} = 1$ ce qui est une initialisation.

On a $\mathrm{A}_{i_\mathrm{N},j_\mathrm{N}} \in]0,1[$ et comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{i_\mathrm{N},k} = 1$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \mathrm{A}_{i_\mathrm{N},k} \geqslant 0$,

ceci nous fournit un entier noté $j_{\mathrm{N}+1} \in [\![1,n]\!] \setminus \{j_\mathrm{N}\}$ tel que $\mathrm{A}_{i_\mathrm{N},j_{\mathrm{N}+1}} \in]0,1[$
De même, on construit $i_{\mathrm{N}+1} \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_\mathrm{N}\}$ tel que $\mathrm{A}_{i_{\mathrm{N}+1},j_{\mathrm{N}+1}} \in]0,1[$

On a donc construit $(i_m)_{1\leqslant m\leqslant \mathrm{N}+1}$ et $(j_m)_{1\leqslant m\leqslant \mathrm{N}+1}$ telles que : $\begin{cases} \forall m \in [\![1,\mathrm{N}+1]\!],\ \mathrm{A}_{i_m,j_m} \in]0,1[\\ \forall m \in [\![1,\mathrm{N}]\!],\ \mathrm{A}_{i_m,j_{m+1}} \in]0,1[\\ \forall m \in [\![1,\mathrm{N}]\!],\ i_m \neq i_{m+1} \\ \forall m \in [\![1,\mathrm{N}]\!],\ j_m \neq j_{m+1} \end{cases}$

Ce qui nous donne l'hérédité.
On a construit nos suites $(i_m)_{m\geqslant 1}$ et $(j_m)_{m\geqslant 1}$ par récurrence.
<u>étape 2</u> Comme le couple (i_m, j_m) prend au plus n^2 valeurs
ceci nous fournit $a < b$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $(i_a, j_a) = (i_b, j_b)$
donc l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, i_a = i_{a+k} \text{ ou } \ j_a = j_{a+k}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$
cet ensemble admet donc un plus petit élément $\alpha > 0$, de plus par construction des suites on a $\alpha > 1$
<u>Premier cas :</u> si $j_a = j_{a+\alpha}$ alors
On pose $r = \alpha$, on a deux familles $i_a, i_{a+1}, \ldots, i_{a+r-1}$ et $j_a, j_{a+1}, \ldots, j_{a+r-1}$ d'indices distincts dans $\{1,2,\ldots,n\}$ tels que pour tous $k \in \{1,2,\ldots,r\}$, $\mathrm{A}_{i_{a+k-1},j_{a+k-1}} \in]0,1[$ et $\mathrm{A}_{i_{a+k-1},j_{a+k}} \in]0,1[$ avec $j_{a+r} = j_a$
<u>Deuxième cas :</u> si $i_a = i_{a+\alpha}$ et $j_a \neq j_{a+\alpha}$ alors
On pose $r = \alpha$, on a deux familles $i_a, i_{a+1}, \ldots, i_{a+r-1}$ et $j_{a+\alpha}, j_{a+1}, \ldots, j_{a+r-1}$ d'indices distincts dans $\{1,2,\ldots,n\}$ tels que pour $k = 1$, $\mathrm{A}_{i_a,j_{a+\alpha}} = \mathrm{A}_{i_{a+\alpha},j_{a+\alpha}} \in]0,1[$ et $\mathrm{A}_{i_a,j_{a+1}} \in]0,1[$ et pour tous $k \in \{2,\ldots,r\}$, $\mathrm{A}_{i_{a+k-1},j_{a+k-1}} \in]0,1[$ et $\mathrm{A}_{i_{a+k-1},j_{a+k}} \in]0,1[$ avec $j_{a+r} = j_{a+\alpha}$
Dans chaque cas il suffit d'effectuer un changement d'indice pour obtenir :

$\boxed{\text{un entier } r > 1 \text{ et deux familles } i_1, i_2, \ldots, i_r \text{ et } j_1, j_2, \ldots, j_r \text{ d'indices distincts dans } \{1,2,\ldots,n\}}$

$\boxed{\text{tels que pour tous } k \in \{1,2,\ldots,r\},\ \mathrm{A}_{i_k,j_k} \in]0,1[\text{ et } \mathrm{A}_{i_k,j_{k+1}} \in]0,1[\text{ avec } j_{r+1} = j_1}$

J'ai imposé $r \geqslant 2$ car avec $r = 1$, le résultat ne permet pas d'introduire la matrice B de l'énoncé.

10. On note $m = \min\left(\bigcup_{k=1}^{r}\left\{\mathrm{A}_{i_k,j_k}, \mathrm{A}_{i_k,j_{k+1}}, 1-\mathrm{A}_{i_k,j_k}, 1-\mathrm{A}_{i_k,j_{k+1}}\right\}\right)$

    De sorte que les matrices $\mathrm{A} - m\mathrm{B}$ et $\mathrm{A} + m\mathrm{B}$ sont à coefficients positifs (ou nuls)

    La somme des coefficients de chaque rangée de B est nulle.

    Ainsi $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{A} - m\mathrm{B})_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{A}_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{A} + m\mathrm{B})_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{A}_{i,j} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

    de plus $\mathrm{B} \neq 0$

    donc on a $\mathrm{A} \neq \mathrm{A} - m\mathrm{B} \in \mathcal{B}_n$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{A} + m\mathrm{B} \in \mathcal{B}_n$ et $\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} - m\mathrm{B}) + \frac{1}{2}(\mathrm{A} + m\mathrm{B})$

    ainsi $\boxed{\text{A n'est pas un élément extrémal de } \mathcal{B}_n}$

    On vient d'établir la contraposée de : $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{B}_n,\ (\mathrm{M} \text{ est extrémale dans } \mathcal{B}_n) \Longrightarrow (\mathrm{M} \in \mathcal{P}_n)$

    On a établi la réciproque en 8.

    On en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des éléments extrémaux de } \mathcal{B}_n \text{ est } \mathcal{P}_n}$

11. La matrice A est à coefficients positifs, on peut donc utiliser le résultat admis.

    Par l'absurde, on suppose que A n'admet pas un chemin strictement positif

    Ainsi par contraposée du résultat admis, on peut extraire la matrice nulle de A ayant p lignes et q colonnes avec $p + q = n + 1$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$.

    Quitte à réordonner les lignes et les colonnes de la matrice A, (ce qui ne change pas le caractère bistochastique), on peut donc supposer que la matrice $(\mathrm{A}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

    Premier cas $1 < p < n$ Dans cas, $1 < q < n$ alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathrm{A}_{i,j} = \sum_{j=q+1}^{n}\mathrm{A}_{i,j}$

    donc $p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=q+1}^{n}\mathrm{A}_{i,j} = \sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{p}\mathrm{A}_{i,j} \leqslant \sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{A}_{i,j} = \sum_{j=q+1}^{n}1 \leqslant n - q$

    donc $n + 1 = p + q \leqslant n$ Absurde

    Deuxième cas $p = n$ Dans ce cas $q = 1$ et $(\mathrm{A}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant 1}}$ est nulle donc $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{A}_{i,1} = 0$ Absurde

    Troisième cas $p = 1$ Dans ce cas $q = n$ et $(\mathrm{A}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 1\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est nulle donc $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{A}_{1,i} = 0$ Absurde

    On a montré par l'absurde que $\boxed{\text{A admet un chemin strictement positif}}$

12. — Par l'absurde, on suppose que $\min\limits_{j}\left(\mathrm{A}_{\sigma(j),j}\right) = \lambda_0 \geqslant 1$

    Comme $\mathrm{A} \in \mathcal{B}_n$ on a $\min\limits_{j}\left(\mathrm{A}_{\sigma(j),j}\right) = \lambda_0 = 1$

    Comme $\mathrm{A} \in \mathcal{B}_n$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathrm{A}_{\sigma(j),j} = 1$ car $\mathrm{A}_{\sigma(j),j} \leqslant 1$

    Donc sur chaque colonne numéro j, le seul coefficient non nul est $\mathrm{A}_{\sigma(j),j}$

    car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{A}_{i,j} = 1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{A}_{i,j} \geqslant 0$

    Donc $\mathrm{A} = \mathrm{M}_\sigma$ Absurde d'après l'énoncé

    On a montré que $\lambda_0 \neq 1$ ainsi $\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}_0 \text{ est bien définie}}$

    — Les coefficients de A_0 sont identiques à ceux de A sauf pour ceux en position $(\sigma(j), j)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$

    et on a $\mathrm{A}_{0_{\sigma(j),j}} = \dfrac{\mathrm{A}_{\sigma(j),j} - \lambda_0}{1 - \lambda_0} \geqslant 0$ par définition de λ_0

    Le coefficient s'annule pour les j_0 (qui existe(nt) bien) tels que $\mathrm{A}_{\sigma(j_0),j_0} = \lambda_0 > 0$

    La somme des coefficients de chaque rangée de $\mathrm{A} - \lambda_0\mathrm{M}_\sigma$ vaut $1 - \lambda_0$

donc La somme des coefficients sur chaque rangée de A_0 vaut 1

Ainsi $\boxed{A_0 \text{ est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que } A}$

13. Pour $p \in [\![n, n^2]\!]$ on considère la propriété H_p que l'on va démontrer par récurrence
"*Toute matrice* $B \in \mathcal{B}_n$ *ayant au plus p coefficients non nuls s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation* $M_0, M_1, \ldots, M_s$ *:* $B = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$ *où les coefficients* λ_i *sont tous strictement positifs et de somme* $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$"

Initialisation : Soit $B \in \mathcal{B}_n$ ayant au plus n coefficients non nuls

Alors sur chaque colonne et sur chaque ligne la matrice B a au plus un coefficient non nul car la somme sur chaque rangée vaut 1

Ainsi sur chaque colonne et sur chaque ligne la matrice B admet exactement un coefficient non nul qui vaut un

On définit $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ par $i = \sigma(j) \Longleftrightarrow B_{i,j} = 1$

σ est donc surjective et par conséquent bijective car $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, n]\!]$ ont même cardinal fini

ainsi $B = 1.M_\sigma$ je prends donc $s = 0$, $\lambda_0 = 1$ pour obtenir le résultat voulu

Hérédité : Soit $p \in [\![n, n^2 - 1]\!]$ tel que H_p. Montrons H_{p+1}

Soit $B \in \mathcal{B}_n$ ayant au plus $p + 1$ coefficients non nuls.

Donc $B \notin \mathcal{P}_n$ ainsi on peut lui appliquer le résultat de la question 12 ;

ce qui nous fournit , $\mu \in]0, 1[$ et M_σ matrice de permutation associée à une permutation σ telle que

$$B' = \frac{1}{1-\mu}(B - \mu M_\sigma) \in \mathcal{B}_n \text{ et } B' \text{ a au plus } p \text{ coefficients non nuls}$$

H_p nous fournit un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \ldots, M_s$ et des coefficients λ_i tous strictement positifs et de somme $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$ tel que

$$B' = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$$

donc $B = \mu M_\sigma + (1-\mu)\lambda_0 M_0 + (1-\mu)\lambda_1 M_1 + \cdots + (1-\mu)\lambda_s M_s$

On a $\mu > 0$ et pour tout $i \in [\![0, s]\!]$, $(1-\mu)\lambda_i > 0$ et $\mu + (1-\mu)\lambda_0 + (1-\mu)\lambda_1 + \cdots + (1-\mu)\lambda_s = 1$

ce qui prouve H_{p+1}

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall p \in [\![n, n^2]\!]$, H_p

on applique cette propriété H_{n^2} à la matrice A, on peut conclure que

A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \ldots, M_s$:

$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$ où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs tels que $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$

14. L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est finie, d'où $\boxed{\inf_{M \in \mathcal{P}_n} \varphi(M) \text{ existe}}$ (c'est même un minimum)
il existe alors $m \in \mathcal{P}_n$ tel que $\varphi(m) = \inf_{M \in \mathcal{P}_n} \varphi(M)$

On a $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc φ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

De plus $\mathcal{B}_n$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Donc φ est bornée sur $\mathcal{B}_n$ et y atteint ces bornes

d'où $\boxed{\inf_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M) \text{ existe}}$ et il existe $A \in \mathcal{B}_n$ tel que $\varphi(A) = \inf_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M)$

En utilisant le résultat de la question précédente, on écrit A comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \ldots, M_s$: $A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$ où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs tels que $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$

Comme $m \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$, on a $\varphi(\mathrm{A}) \leqslant \varphi(m)$
et $\varphi(\mathrm{A}) = \lambda_0\varphi(\mathrm{M}_0) + \lambda_1\varphi(\mathrm{M}_1) + \cdots + \lambda_s\varphi(\mathrm{M}_s) \geqslant \lambda_0\varphi(m) + \lambda_1\varphi(m) + \cdots + \lambda_s\varphi(m) = \varphi(m)$
Ainsi $\inf\limits_{\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n} \varphi(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{A}) = \varphi(m)$

On en déduit que $\boxed{\inf\limits_{\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n} \varphi(\mathrm{M}) \text{ existe et est atteint en une matrice de permutation}}$

C Inégalité de Hoffman-Wielandt

15. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$
On a ${}^t(\mathrm{PAQ})\mathrm{PAQ} = {}^t\mathrm{Q}\,{}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{PPAQ} = {}^t\mathrm{Q}\,{}^t\mathrm{AAQ}$ car $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Or deux matrice semblables ont même trace et ${}^t\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{-1}$
donc ${}^t(\mathrm{PAQ})\mathrm{PAQ} = {}^t\mathrm{Q}\,{}^t\mathrm{AAQ}$ et ${}^t\mathrm{AA}$ ont même trace
Ainsi $\|\mathrm{PAQ}\|^2 = \|\mathrm{A}\|^2$, donc on a $\boxed{\|\mathrm{PAQ}\| = \|\mathrm{A}\|}$

16. A et B sont deux matrices **symétriques réelles**
Le théorème spectral nous fournit une matrice diagonale réelle $\mathrm{D_A}$ et une matrice orthogonale Q telle que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{QD_AQ}$
D'après ce qui précède car ${}^t\mathrm{Q}, \mathrm{Q} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a :
$\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2 = \|\mathrm{Q}(\mathrm{A} - \mathrm{B})\,{}^t\mathrm{Q}\|^2 = \|\mathrm{D_A} - \mathrm{QB}\,{}^t\mathrm{Q}\|^2$
on a $\mathrm{QB}\,{}^t\mathrm{Q}$ est symétrique réelle le théorème spectral nous fournit une matrice diagonale réelle $\mathrm{D_B}$ et une matrice orthogonales $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telles que $\mathrm{QB}\,{}^t\mathrm{Q} = \mathrm{PD_B}\,{}^t\mathrm{P}$
et comme $\mathrm{I}_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2 = \|\mathrm{D_A} - \mathrm{PD_B}\,{}^t\mathrm{P}\|^2 = \|\mathrm{I}_n(\mathrm{D_A} - \mathrm{PD_B}\,{}^t\mathrm{P})\mathrm{P}\|^2$
donc $\boxed{\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2 = \|\mathrm{D_AP} - \mathrm{PD_B}\|^2 \text{ avec } \mathrm{D_A}, \mathrm{D_B} \text{ diagonales réelles et } \mathrm{P} = (\mathrm{P}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$

17. La matrice R définie par : $\mathrm{R}_{i,j} = (\mathrm{P}_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, est à coefficients dans $\mathbb{R}^+$
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{R}_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{n}(\mathrm{P}_{i,j})^2 = 1 = \sum\limits_{j=1}^{n}(\mathrm{P}_{j,i})^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} = \mathrm{R}_{j,i}$ car les rangées de $\mathrm{R} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sont unitaires pour les normes euclidiennes classiques
Ainsi $\boxed{\text{la matrice R est bistochastique}}$
Dans la construction précédente, on a le choix pour la matrice D(A) qui est diagonale et semblable à A et la matrice D(B) est diagonale et semblable à $\mathrm{QB}\,{}^t\mathrm{Q}$ donc à B.
Ainsi l'énoncé est maladroit car le résultat dépend des choix faits à la question précédente ; quitte à changer P et Q, on peut effectivement réordonner les valeurs propres de façon à ce qu'elles se retrouvent dans l'ordre voulu dans $\mathrm{D_A}$ et $\mathrm{D_B}$
On peut donc supposer que $\mathrm{D_A} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1(\mathrm{A}), \ldots, \lambda_n(\mathrm{A}))$ et $\mathrm{D_B} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1(\mathrm{B}), \ldots, \lambda_n(\mathrm{B}))$
On note $\mathrm{D_AP} - \mathrm{PD_B} = (m_{i,j})$
On a pour i et $j \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,j} = \lambda_i(\mathrm{A})\mathrm{P}_{i,j} - \mathrm{P}_{i,j}\lambda_j(\mathrm{B}) = \mathrm{P}_{i,j}(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B}))$
et $\|\mathrm{D_AP} - \mathrm{PD_B}\|^2 = \mathrm{tr}\left({}^t(\mathrm{D_AP} - \mathrm{PD_B})\mathrm{D_AP} - \mathrm{PD_B}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i_j}^2$
donc $\|\mathrm{D_AP} - \mathrm{PD_B}\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(\mathrm{P}_{i,j})^2(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B}))^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{R}_{i,j}|\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})|^2$
On a bien montré que $\boxed{\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{R}_{i,j}|\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})|^2}$

18. On considère l'application $\varphi\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \mathrm{M}=(m_{i,j}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}|\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{B})|^2\end{array}\right.$

   φ est une forme linéaire donc d'après 14, $\inf\limits_{\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n}\varphi(\mathrm{M})$ existe et est atteint en une matrice de permutation M_{σ_0}.
   donc $\varphi\left(\mathrm{M}_{\sigma_0}\right)\leqslant\varphi(\mathrm{R})$ car $\mathrm{R}\in\mathcal{B}_n$
   et on a $\min\limits_{\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n}\varphi(\mathrm{M})=\min\limits_{\mathrm{M}\in\mathcal{P}_n}\varphi(\mathrm{M})=\varphi(\mathrm{M}_{\sigma_0})=\min\limits_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varphi(\mathrm{M}_\sigma)$
   Pour une permutation σ, on a $\varphi(\mathrm{M}_\sigma)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{M}_\sigma)_{i,j}|\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{B})|^2=\sum_{j=1}^{n}|\lambda_{\sigma(j)}(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{B})|^2$
   On a bien
   $$\boxed{\min_{\sigma}\sum_{j=1}^{n}|\lambda_{\sigma(j)}(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{B})|^2\leqslant\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|^2}$$
   où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$.

19. **Remarque 1 :** Le sujet cache le problème de l'existence d'une variable aléatoire définie sur un univers quelconque de loi uniforme prenant ses valeurs dans ensemble à n éléments .
   Or si je prends un univers Ω ayant au moins deux éléments et la tribu Υ ayant comme élément un singleton $\{a\}$ de probabilité : $\mathbb{P}(\{a\})=\dfrac{2}{3}$.
   Alors pour tout $n>1$, **on ne pourra pas** trouver de variable X suivant une loi uniforme à valeurs dans un ensemble ayant n éléments car $\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{3}$.
   Par conséquent, je **considérerai** qu'il existe une variable aléatoire Z de $(\Omega,\Upsilon,\mathbb{P})$ à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ tel que Z suive la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ c'est à dire que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{Z}=i)=1/n$

   Remarque 2 : La question est fausse si on n'impose pas que les a_i et les b_i sont distincts
   Je prends $n=3$ et $a'(1)=a'(2)=0=b'(1)$ et $a'(3)=1=b'(2)=b'(3)$ alors P_1 et P_2 sont des lois uniforme sur $\{a'(1),a'(2),a'(3)\}=\{0,1\}$ qui sont des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$. Ainsi si $\mathrm{X}\sim\mathrm{Y}\sim\mathrm{P}_1$, alors X et $\mathrm{Y}\in\mathrm{V}$.
   En prenant $\mathrm{X}=\mathrm{Y}$, on a $\mathrm{E}(|\mathrm{X}-\mathrm{Y}|)^2=0$ donc $\mathrm{d}^2(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)=0$
   En appliquant la formule de l'énoncé, on obtient $0=\frac{1}{3}\left(0^2+1^2+0^2\right)$
   En fait, la question ainsi posée est maladroite. La loi uniforme devrait porter sur les indices dans $[\![1,n]\!]$ par x ou $y:\omega\in\Omega\mapsto i\in[\![1,n]\!]$ et puis compositions avec $a:i\mapsto a(i)$ ou $b:i\mapsto b(i)$, on construit les variables aléatoires $\mathrm{X}=a\circ x$ et $\mathrm{Y}=b\circ y$.
   Je refuse de formaliser plus avant (la preuve est plus délicate à rédiger) ; c'est pour cela que je **considérerai** que
   $$a(1)<\cdots<a(n)\text{ et }b(1)<\cdots<b(n)$$
   On considère X et $\mathrm{Y}\in\mathrm{V}$ telles que $\mathrm{X}\sim\mathrm{P}_1$ et $\mathrm{Y}\sim\mathrm{P}_2$
   Je définis la matrice $\mathrm{R}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs par : $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ \mathrm{R}_{i,j}=n\mathrm{P}\Big((\mathrm{X},\mathrm{Y})=(a(i),b(j))\Big)$
   Ainsi pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathrm{R}_{i,j}=n\mathrm{P}(\mathrm{X}=a(i))=1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathrm{R}_{j,i}=1$ de sorte que $\mathrm{R}\in\mathcal{B}_n$
   En utilisant la formule du transfert avec la fonction $(x,y)\mapsto|x-y|^2$, on a
   $\mathrm{E}(|\mathrm{X}-\mathrm{Y}|^2)=\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a(i)-b(j)|^2\mathrm{P}\Big((\mathrm{X},\mathrm{Y})=(a(i),b(j))\Big)=\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathrm{R}_{i,j}|a(i)-b(j)|^2$
   Comme en 18 (à l'aide de 14) il existe $\Pi\in\mathcal{P}_n$ telle que
   $$\forall\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n,\ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Pi_{i,j}|a(i)-b(j)|^2\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathrm{M}_{i,j}|a(i)-b(j)|^2$$

Soit σ la permutation telle que $\Pi = \mathrm{M}_\sigma$, ainsi on a $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \Pi_{i,j}|a(i)-b(j)|^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a(\sigma(j))-b(j)|^2$

Montrons que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(j)=j$. Par l'absurde, on suppose que $\{j\in[\![1,n]\!]\,/\,\sigma(j)\neq j\}\neq\emptyset$.

On note j_0 le plus petit élément de cette partie non vide de $\mathbb{N}$ et $j_1=\sigma(j_0)$ et $j'=\sigma^{-1}(j_0)$.

Nécessairement on a $j_1>j_0$ et $j'>j_0$

On a $\big(|a(j_1)-b(j_0)|^2+|a(j_0)-b(j')|^2\big)-\big(|a(j_0)-b(j_0)|^2+|a(j_1)-b(j')|^2\big)=\cdots$

$\cdots=-2\big(a(j_1)b(j_0)+a(j_0)b(j')-a(j_0)b(j_0)-a(j_1)b(j')\big)$

donc $\big(|a(j_1)-b(j_0)|^2+|a(j_0)-b(j')|^2\big)-\big(|a(j_0)-b(j_0)|^2+|a(j_1)-b(j')|^2\big)=2(a(j_1)-a(j_0))(b(j')-b(j_0))>0$

de sorte que $\big(|a(j_1)-b(j_0)|^2+|a(j_0)-b(j')|^2\big)>\big(|a(j_0)-b(j_0)|^2+|a(j_1)-b(j')|^2\big)$

On considère la transposition τ qui échange j_0 et j_1,

de sorte que $\tau\circ\sigma(j_0)=j_0$, $\tau\circ\sigma(j')=j_1$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]\setminus\{j_0,j'\}$, $\tau\circ\sigma(i)=\sigma(i)$

On note $\mathrm{M}\in\mathcal{P}_n$ la matrice de permutation associée à $\tau\circ\sigma$

D'après l'inégalité précédente $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Pi_{i,j}|a(i)-b(j)|^2>\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathrm{M}_{i,j}|a(i)-b(j)|^2$

ce qui est en contradiction avec la choix de la matrice Π

Ainsi $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(j)=j$ et donc $\Pi=\mathrm{I}_n$

Ainsi $\displaystyle\mathrm{E}(|\mathrm{X}-\mathrm{Y}|^2)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Pi_{i,j}|a(i)-b(j)|^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a(i)-b(i)|^2$

ceci prouve l'existence de $\displaystyle\mathrm{d}^2(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)=\inf_{\substack{\mathrm{X},\mathrm{Y}\in\mathrm{V}\\ \mathrm{X}\sim\mathrm{P}_1,\mathrm{Y}\sim\mathrm{P}_2}}\mathrm{E}(|\mathrm{X}-\mathrm{Y}|^2)$ et que $\displaystyle\mathrm{d}^2(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a(i)-b(i)|^2$

Je considère $\tilde{\mathrm{X}}=a\circ\mathrm{Z}$ et $\tilde{\mathrm{Y}}=b\circ\mathrm{Z}$ où Z est la variable aléatoire de la remarque 1.

Ainsi $\tilde{\mathrm{X}}$ et $\tilde{\mathrm{Y}}$ sont dans V et $\tilde{\mathrm{X}}\sim\mathrm{P}_1$ et $\tilde{\mathrm{Y}}\sim\mathrm{P}_2$

et la matrice I_n vérifie $\forall i,j\in[\![1,n]\!]$, $(\mathrm{I}_n)_{i,j}=n\mathrm{P}\Big((\mathrm{X},\mathrm{Y})=(a(i),b(j))\Big)$

ainsi $\displaystyle\mathrm{E}\left(\left|\tilde{\mathrm{X}}-\tilde{\mathrm{Y}}\right|^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a(i)-b(i)|^2$

d'où la borne inférieure est un minimum et $\displaystyle\boxed{\mathrm{d}^2(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a(i)-b(i)|^2}$

On considère les matrices symétriques réelles A,B de valeurs propres respectives $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(b_1,\ldots,b_n)$.

En utilisant la question 18, on a $\displaystyle\min_\sigma\sum_{j=1}^{n}|a(\sigma(j))-b(j)|^2\leqslant\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|^2$

où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$.

En utilisant ce qui précède le minimum est atteint en l'identité donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|a(j)-b(j)|^2\leqslant\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|^2$

On conclut facilement....