

CONCOURS COMMUN SUP 2000

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques (toutes filières)

Lundi 22 mai 2000 de 14h00 à 18h00

Extrait

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend :

- 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4
- 23 questions en Analyse et 18 questions en Algèbre.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette correspondant à l'épreuve et figurant sur leur convocation.

ANALYSE

Partie I : Étude de la réciproque de la fonction $\tanh$.

On notera respectivement $\cosh$, $\sinh$ et $\tanh$ les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. – Montrer, en étudiant ses variations, que $\tanh$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
On note artanh (« argument tangente hyperbolique ») sa réciproque.
2. – Exprimer la dérivée de $\tanh$ en fonction de $\tanh$.
3. – Démontrer que artanh est impaire.
4. – Démontrer que artanh est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. – Exprimer artanh à l'aide de fonctions usuelles.
6. – Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de artanh en 0.

Partie II : Étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) : $x y' + 3 y = \frac{1}{1-x^2}$.

7. – Résoudre (E) sur l'intervalle $J =]0, 1[$.

Partie III : Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en zéro qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

8. – Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.

9. – Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.

10. – Montrer que, si f est solution, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$

(on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)

11. – Montrer que, si f est solution, $-f$ est aussi solution.

12. – Montrer que $\tanh$ est solution du problème posé.

Dans les questions 13. à 17., on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

13. – Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

14. – Établir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0 .

15. – En utilisant les résultats des questions 13. et 14., aboutir à une contradiction.

16. – Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0) = -1$ » ?

17. – Conclusion ?

Dans les questions 18. à 22., on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$.

18. – En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions

13. à 17., montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$.

On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{artanh}(f(x))$.

19. – Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$.

20. – Montrer que g est dérivable en zéro.

21. – Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

22. – En déduire que g est linéaire.

23. – Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

FIN

