PROBLÈME : Fonction Digamma.

Partie préliminaire

III.1.

a. Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ par produit de fonctions continues, les fonctions exponentielle et puissances étant bien continues sur $]0, +\infty[$.
On a $h_x(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ et $t^2\, e^{-t}t^{x-1} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, d'où $h_x(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Ainsi, par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann en 0 et en $+\infty$, $h_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut ainsi définir la fameuse fonction Gamma d'Euler $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$, sur $]0, +\infty[$.

b. Soit $x > 0$. La fonction h_x définie dans la question précédente est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. La positivité de l'intégrale nous donne $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt \geq 0$ et la continuité de h_x implique qu'on ne pourrait avoir $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt = 0$ que si h_x était identiquement nulle sur $]0, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas.
Ainsi $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t)dt > 0$, et ce pour tout $x > 0$.

c. On définit $h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & h_x(t) = e^{-t}t^{x-1} \end{array}\right.$.

– Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 (et même C^∞ en fait) sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ sur tout $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et, pour tout $t > 0$, la continuité de $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Notons d'ailleurs qu'on a, pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \ln(t)e^{-t}t^{x-1}$.

– Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $0 < a \leq b$.

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \left\{\begin{array}{l} |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} \text{ si } t \leq 1 \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} \text{ si } t > 1 \end{array}\right. .$$

Notons donc φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \left\{\begin{array}{l} |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} \text{ si } t \leq 1 \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} \text{ si } t > 1 \end{array}\right.$. Cette fonction est continue par morceaux (et même continue en fait).
De plus, pour $t > 1$, on a $t^2\varphi(t) = t^{1+b}\ln(t)e^{-t}$, donc $t^2\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, d'où $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Et, pour $t \in]0,1]$, on a $t^{1-\frac{a}{2}}\varphi(t) = t^{\frac{a}{2}}|\ln(t)|e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (toujours par croissance comparée, car $a > 0$), donc $\varphi(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$, avec $1 - \frac{a}{2} <$

1.
Donc φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
On en déduit l'hypothèse de domination sur tous les segments de $]0,+\infty[$.
Cela prouve finalement que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, donc dérivable, avec :

$$\forall x>0,\ \Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt.$$

III.2. Pour tout entier $n\geq 2$, on pose $u_n=\displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t}dt-\frac{1}{n}$.

a. Notons $f:\left\{\begin{array}{ccc}[1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \frac{1}{t}\end{array}\right.$. Comme la fonction f est continue (donc continue par morceaux), décroissante et à valeurs positives, un théorème du cours indique que la série $\sum\limits_{n\geq 2}\left(\int_{n-1}^{n}f(t)dt-f(n)\right)$ converge, c'est-à-dire que $\sum\limits_{n\geq 2}u_n$ converge.

b. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $H_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\ln(n)$.

Pour $n\geq 2$, on a $\sum\limits_{k=2}^{n}u_k=\int_1^n\frac{dt}{t}-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$ par relation de Chasles, d'où $\sum\limits_{k=2}^{n}u_k=\ln(n)+1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1-H_n$.
Comme la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n}u_k\right)_{n\geq 2}$ converge par la question précédente, il s'ensuit que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge.

On note dans la suite $\gamma=\lim\limits_{n\to+\infty}H_n$, et on définit la fonction Digamma ψ, pour $x\in]0,+\infty[$, par $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. Pour $x\in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n\geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n:t\mapsto\left\{\begin{array}{l}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\text{ si } t\in]0,n]\\ 0\text{ si } t>n\end{array}\right..$$

a. On peut établir l'inégalité souhaitée par simple étude de la fonction $x\mapsto\ln(1-x)+x$ sur $]-\infty,1[$, ou bien par un argument de convexité : en effet la fonction ln est notoirement concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc son graphe est au-dessous de chacune de ses tangentes. Comme la tangente en $x=1$ a pour équation $y=x-1$, on en déduit : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln(x)\leq x-1$. Il vient ensuite, via deux changements de variable successifs : $\forall x>-1$, $\ln(1+x)\leq x$, puis $\forall x<1$, $\ln(1-x)\leq -x$.

Ensuite, soit $n\geq 1$ (et, normalement, $x>0$ est déjà fixé aussi dès l'énoncé de la question III.3.). La fonction f_n est positive par définition.
De plus, pour tout $t\in]0,n[$, $f_n(t)=e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1}$, avec $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\leq-\frac{t}{n}$ par la question précédente, vu qu'on a bien $\frac{t}{n}<1$ pour $t\in]0,n[$. On en déduit, par croissance de l'exponentielle et produit par une quantité positive : $f_n(t)\leq e^{n\times\left(-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1}=e^{-t}t^{x-1}$. Enfin f_n est nulle sur $[n,+\infty[$, tandis que la fonction $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ y est positive, d'où finalement l'encadrement :

$$\forall t>0,\ 0\leq f_n(t)\leq e^{-t}t^{x-1}.$$

b. Comme demandé, on applique le théorème de convergence dominée :
– Pour tout $n\geq 1$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Soit $t > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq t$, par exemple $N = \lfloor t \rfloor + 1$. Alors, pour tout $n \geq N$, $t \in]0, n]$, et donc $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. Or, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)}$, et $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-t+o(1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-t}$ par continuité de l'exponentielle. Donc $f_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-t} t^{x-1}$.
  On a ainsi prouvé que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.
– De plus, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t > 0$, $|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1}$ par la question précédente, et on a prouvé dans la première question du problème que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est (continue bien sûr et) intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.
Comme f_n est nulle sur $[n, +\infty[$, cela donne finalement :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x),$$

et ce raisonnement a bien été mené pour tout $x > 0$.

III.4. Pour tout entier naturel n et tout $x > 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.
La fonction $\alpha : u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est bien définie et continue sur $]0, 1]$.
De plus, $\alpha(u) \underset{u \to 0^+}{\sim} u^{x-1} = \frac{1}{u^{1-x}}$, avec $1 - x < 1$, donc α est intégrable sur $]0, 1]$ par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann.
Cela assure la bonne définition de $I_n(x)$.
On définit maintenant sur $]0, 1]$ les fonctions $\alpha_1 : u \mapsto (1-u)^n$ et $\alpha_2 : u \mapsto \frac{u^x}{x}$. Ces fonctions sont de classe C^1, et on a $\alpha_1(u)\alpha_2(u)$ qui admet une limite finie pour $u \longrightarrow 0^+$, en l'occurrence 0. On en déduit, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^1 \alpha_1(u)\alpha_2'(u)du = \alpha_1(1)\alpha_2(1) - \lim_{u \to 0^+} \alpha_1(u)\alpha_2(u) - \int_0^1 \alpha_1'(u)\alpha_2(u)du \\ &= 0 - 0 + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1). \end{aligned}$$

b. Soit $x > 0$.
On a $I_0(x) = \int_0^1 u^{x-1} du = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$.
Soit $n \geq 1$. On a, par une récurrence immédiate,
$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{x+1} I_{n-2}(x+2) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

c. La fonction $t \mapsto \frac{t}{n}$ réalise une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $]0, n]$ sur $]0, 1]$. Via le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, on obtient donc :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x I_n(x).$$

Le résultat de la question 3.b. se réécrit ainsi : $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^x I_n(x)$. Et le calcul de la question précédente permet de conclure :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} n^x \times \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{n} (x+k)}.$$

Cette relation est appelée *formule de Gauss* (selon l'énoncé, mais n'est-ce pas plutôt la formule dite d'Euler dans la littérature ?).

III.5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.
L'indication donnée (fallait-il la prouver ?) est immédiate en remarquant qu'on a

Dérivant cette relation sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$g'(x) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{x} - \gamma,$$

c'est-à-dire, vu que $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$, $\psi(x) = -g'(x) - \frac{1}{x} - \gamma$.
Comme $-g'(x) = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k}\right)$, on a finalement établi :

$$\forall x > 0,\ \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right).$$

III.7.

a. Posant $x = 1$ dans la formule précédente, on trouve : $\psi(1) = -1 - \gamma + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$, d'où, par télescopage, $\psi(1) = -1 - \gamma + 1 = -\gamma$.
De plus $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim\limits_{X\to+\infty}[-e^{-t}]_0^X = \lim\limits_{X\to+\infty} 1 - e^{-X} = 1$ donc, vu que $\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$, on obtient $\Gamma'(1) = -\gamma$.
Mais en reprenant l'expression obtenue à la question 1.c., on constate que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$, d'où finalement :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt = -\gamma.$$

b. D'après la formule de la question 6.c., on a, pour tout $x > 0$,

$$\psi(x+1) - \psi(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x}\right)$$

par somme de séries convergentes. Et donc :

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) = \frac{1}{x}.$$

Remarque. *On aurait aussi pu procéder ainsi :*

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right)\right).$$

Or, il est bien connu que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *(il suffit d'intégrer par parties), donc*

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi(k+1) - \psi(k) = \frac{1}{k}$.
Il s'ensuit, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\big(\psi(k+1) - \psi(k)\big) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

c. Soit $x > 0$ fixé. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $j_k : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x} \end{array}\right.$.
Cette notation est discutable : il aurait peut-être été préférable de noter $j_{k,x}$, pour insister sur le fait que l'on travaille à $x > 0$ fixé, et que la convergence uniforme étudiée ici ne

porte que sur la variable y.
On peut réécrire $j_k(y) = \frac{k+y+x-k-y-1}{(k+y+1)(k+y+x)} = \frac{x-1}{(k+y+1)(k+y+x)}$ donc,

$$\forall y > 0,\ |j_k(y)| \leq \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}.$$

Comme $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$ est une série convergente, vu que $\frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{|x-1|}{k^2}$, on a la convergence normale, donc uniforme, de $\sum\limits_{k\geq 0} j_k$ sur $]0,+\infty[$.
Ensuite, reprenant la formule de 6.c., on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = -\frac{1}{x+n} + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+n}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1+n}\right),$$

et selon le même principe de calcul qu'à la question précédente, on aboutit à :

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1+n} - \frac{1}{k+x+n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} j_k(n).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $j_k(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par le théorème de la double limite (qui s'applique ici car la série de fonctions étudiée converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$),

$$\lim_{n\to+\infty}\big(\psi(x+n) - \psi(1+n)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} j_k(n) = 0.$$

III.8. Par analyse-synthèse :

- **Analyse** : Soit f solution. On va montrer que f vérifie la formule de ψ établie en 6.c., à savoir :

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

  Puisque $\frac{1}{t} = f(t+1) - f(t)$ pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\big(f(k+1) - f(k) - f(k+x+1) + f(k+x)\big) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\big(f(k+1) - f(k)\big) + \sum_{k=1}^{n}\big(f(k+x) - f(k+x+1)\big)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(f(n+1) - \underbrace{f(1)}_{=-\gamma} + f(1+x) - f(n+x+1)\right) \\
&= f(x+1) + \gamma - \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\big(f(x+1+n) - f(1+n)\big)}_{=0} = f(x) + \frac{1}{x} + \gamma,
\end{aligned}$$

  ce qui montre bien la relation voulue, et donc $f = \psi$.
- **Synthèse** : La seule solution éventuelle au problème est donc ψ. Mais on a prouvé en 7.a., 7.b. et 7.c. que ψ satisfait les trois conditions voulues, donc finalement ψ est solution, et c'est la seule.

Fin extrait