École Polytechnique

Concours d'admission 2016 **Filière MP**

Composition de Mathématiques B – (X)

(Durée : 4 heures)
L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
Toute affirmation doit être clairement et complètement justifiée.

Sujet saisi par Michel Quercia (`michel.quercia@prepas.org`*) d'après l'original. Les parties en caractères penchés ont été ajoutées pour rectifier les erreurs que comportait l'énoncé d'origine.*

* * *

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs réelles strictement positives* dont la loi est donnée par :

$$\forall\, i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = x_i) = p_i \geqslant 0 \text{ avec } \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1,$$

où $(x_i)_{i\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement positifs *distincts*. On suppose que X admet une espérance finie notée $m = \mathbb{E}(X) > 0$. Soit (X_k) une suite de variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs réelles strictement positives* indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X. On note $(S_k)_{k\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles définies par

$$S_0 = 0, \qquad \text{et pour } n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objet de ce problème est l'étude du nombre (aléatoire) d'éléments de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui appartiennent à l'intervalle $[a, b]$, défini pour $\omega \in \Omega$ par

$$N(a,b)(\omega) = \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} \text{ tq } S_k(\omega) \in [a,b]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_k \in [a,b]\}}(\omega),$$

et en particulier le comportement de $N(a,b)$ quand a et b tendent vers l'infini.

Première partie

1) a) Justifier pour tous $\ell \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\{N(0,\ell) = n+1\} &= \{S_n \leqslant \ell < S_{n+1}\},\\ \{S_n \leqslant \ell\} &= \{N(0,\ell) \geqslant n+1\},\\ \{S_n \geqslant \ell\} &\subset \{N(0,\ell) \leqslant n+1\}.\end{aligned}$$

b) On suppose dans cette question que X admet de plus une variance finie ν. Montrer alors que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(S_n \leqslant n(m-\varepsilon)) \leqslant \frac{\nu}{\varepsilon^2 n}.$$

2) *Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On convient que Y admet une espérance, éventuellement infinie, si $\mathbb{P}(Y = \infty) = 0$ et on pose alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k)$. Montrer que l'on a dans ce cas*

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geqslant k).$$

3) **a)** Montrer pour $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \geqslant 0$: $\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell) \leqslant \mathbb{E}(\exp(\ell - S_n))$, puis : $\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell) \leqslant e^\ell \mathbb{E}(\exp(-X))^n$.

b) En déduire que $\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell)$ tend vers 0 quand $n \to \infty$ et que $\mathbb{E}(N(0,\ell)) \leqslant \dfrac{e^\ell}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

c) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $\ell \geqslant 0$, $k, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n,\ N(x, x+\ell) \geqslant k) \leqslant \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n)\,\mathbb{P}(N(0,\ell) \geqslant k),$$

puis :

$$\mathbb{E}(N(x, x+\ell)) \leqslant \frac{e^\ell}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}.$$

Deuxième partie

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup(|f(x)|,\ x \in \mathbb{R})$ sa norme uniforme. On appelle support de f l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) \neq 0\}$. En particulier, si x n'appartient pas au support de f, alors $f(x) = 0$.

Soit $K > 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive bornée à support inclus dans $[0, K]$. *Nous allons* étudier la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $n \geqslant 0$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(g(x - S_k)).$$

4) **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On note $f(x)$ sa limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

b) Montrer que si $g = \mathbb{1}_{[0,K]}$, alors $f(x) = \mathbb{E}(N(x - K, x))$.

c) En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \|g\|_\infty \dfrac{e^K}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

d) Conclure que la suite de fonctions f_n converge simplement vers une fonction f positive, bornée et dont le support est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

5) Soit Y une variable aléatoire *réelle* discrète, indépendante de X, et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que $\mathbb{E}(\varphi(X, Y)) = \sum_{i=0}^\infty p_i \mathbb{E}(\varphi(x_i, Y))$.

6) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{i=0}^\infty p_i f_n(x - x_i)$.

b) Montrer que la fonction f vérifie l'égalité suivante sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i). \tag{E}$$

7) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée qui vérifie $h(x) = \sum_{i=0}^\infty p_i h(x - x_i)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $h(x) = \mathbb{E}(h(x - S_n))$.

b) En déduire que si de plus le support de h est inclus dans $\mathbb{R}^+$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0$.

c) Conclure qu'il existe une unique fonction bornée à support dans $\mathbb{R}^+$ solution de (E).

8) **a)** Montrer que l'ensemble $\Lambda_X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y \in \mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(S_n = y) > 0\}$ est dénombrable et inclus dans $\mathbb{R}^+$. On donne une énumération de cet ensemble : $\Lambda_X = \{y_i \text{ tq } i \in \mathbb{N}\}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^\infty \mathbb{P}(S_k = y_i) g(x - y_i)$.

c) En déduire qu'il existe une suite de réels positifs $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i), \ \text{ et } \sum_{i \in \mathbb{N},\ y_i \in [x-K, x]} q_i = \mathbb{E}(N(x - K, x)).$$

9) **a)** Dans la formule précédente, montrer que la convergence de la série est normale sur tout segment de $\mathbb{R}$.

b) On suppose que g est continue. Montrer que f est uniformément continue. *On pourra utiliser la question* **3c**.

c) On suppose que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que g' *est* bornée. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$, que f' est bornée et uniformément continue et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = g'(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f'(x - x_i).$$

Troisième partie

Soit Λ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall (x, y) \in \Lambda^2$, $x + y \in \Lambda$. On dit que Λ est stable par addition. On définit $\Gamma = \{z \in \mathbb{R}^{+*} \text{ tq } \exists (x, y) \in \Lambda^2 \text{ tq } z = y - x\}$ et $r(\Lambda) = \inf(\Gamma)$.

10) **a)** Montrer que si $x, y \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant n$, alors $nx + k(y - x) \in \Lambda$.

b) Donner deux exemples de tels ensembles Λ, l'un pour lequel $r(\Lambda) > 0$ et l'autre pour lequel $r(\Lambda) = 0$.

11) Dans cette question, on suppose que $r(\Lambda) > 0$.

a) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \Lambda^2$ tels que $b - a \in [r(\Lambda), 2r(\Lambda)[$. On note $d = b - a$.

b) Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n-1$. Montrer que $\Lambda \cap [na+kd, na+(k+1)d] = \{na+kd, na+(k+1)d\}$.

c) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 a + n_0 d > (n_0 + 1)a$ puis qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kd$.

d) En déduire que $\Lambda \subset d\mathbb{Z}$, où $d\mathbb{Z} = \{kd \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$.

12) On suppose maintenant que $r(\Lambda) = 0$.

a) Soit $\eta > 0$. Montrer qu'il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x > A$, $\Lambda \cap [x, x + \eta] \neq \varnothing$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Λ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Quatrième partie

On suppose dans cette partie que pour tout $d \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) < 1$.

13) On considère une fonction h uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ h(x) \leqslant h(0) \text{ et } h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i h(x - x_i).$$

On rappelle que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $h(x) = \mathbb{E}(h(x - S_n))$ (question **7a**).

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$ tels que $\mathbb{P}(S_n = x) > 0$, on a $h(-x) = h(0)$.

b) Soit Λ_X l'ensemble défini en **8a**. *Montrer que* $\Lambda_X \setminus \{0\}$ *est stable par addition et* $r(\Lambda_X \setminus \{0\}) = 0$.

c) En déduire que $h(-x) \to h(0)$ quand $x \to +\infty$.

d) Conclure que h est une fonction constante.

On suppose dans toute la suite que g est de classe $\mathcal{C}^1$, à support dans $[0, K]$ avec $K > 0$. On rappelle que f est la limite croissante des fonctions f_n et l'unique solution de l'équation (E) bornée *à support dans* $\mathbb{R}^+$, *qu'elle est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et que* f' *est bornée,* uniformément continue.

14) **a)** Prouver que la fonction $x \mapsto \sup(f'(t),\ t \geqslant x)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.
On note $c = \lim_{x\to+\infty} \sup(f'(t),\ t \geqslant x)$.

b) Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $f'(y_n) \to c$ quand $n \to \infty$.

On admet qu'il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sous-suite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par $\xi_k(t) = f'(t+t_k)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers une fonction notée ξ.

c) Montrer que ξ est constante, égale à c.

d) Conclure que $c = 0$.

On montrerait de même que $\lim_{x\to+\infty} \inf(f'(t),\ t \geqslant x) = 0$, résultat que l'on admet dans toute la suite.

e) En déduire que $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

f) Montrer alors que pour tout $\ell \geqslant 0$, $f(t + \ell) - f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Le texte qui suit est conforme, à la typographie près, au sujet d'origine. Compte tenu de l'impossibilité de le rendre intelligible et compatible avec la théorie de l'intégration enseignée en classes préparatoires, il est reproduit ici pour mémoire uniquement. Les étudiants sont invités à passer directement à la question **18** *qu'ils peuvent traiter en admettant la convergence énoncée en* **17**.

On suppose dans toute la suite de cette partie qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(X \in [0, a]) = 1$ et on pose

$$g_0(x) = \begin{cases} P(X > x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On admet que g_0 est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t)dt = \mathbb{E}(X)$.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux, positives, bornées et à support dans un segment de $\mathbb{R}^+$. En utilisant la deuxième partie, pour tout $g \in \mathcal{F}$, on note Lg l'unique solution de (E) bornée à support dans $\mathbb{R}^+$.
Nous dirons que la suite $(t_k)_{k\geqslant 0}$ satisfait la propriété $(\mathcal{P})$ si $t_k \to +\infty$ et s'il existe une unique fonction continue bornée $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, telle que pour tout $g \in \mathcal{F}$,

$$Lg(t_k) \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mu(t)\,dt \text{ quand } k \to +\infty.$$

On admet que pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ tendant vers l'infini, il existe une sous suite $(t_k)_{k\geqslant 0}$ de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui satisfait la propriété $(\mathcal{P})$.

15) **a)** Montrer, en utilisant la question **14f**, que pour tous $g \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ et $\ell \geqslant 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)(\mu(t-\ell) - \mu(t))\,dt = 0.$$

b) En déduire que μ est constante.

16) **a)** Montrer que $Lg_0(x) = 1$ pour $x \geqslant 0$ et $Lg_0(x) = 0$ pour $x < 0$.
b) En déduire que $\mu(t) = \dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

17) Conclure que pour tout $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue par morceaux positive bornée à support inclus dans un segment de $\mathbb{R}^+$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(g(x - S_k)) \longrightarrow \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt \text{ quand } x \to +\infty.$$

18) Soit $\ell > 0$ fixé. Déterminer le comportement de $\mathbb{E}(N(x, x+\ell))$ quand $x \to +\infty$. Interpréter le résultat. Ce résultat est-il vrai s'il existe $d > 0$ tel que $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) = 1$?

* *
*

Corrigé

Première partie

1) **a)** Pour $\ell = 0$, on considère que $[0, \ell] = \{\ell\}$. Pour $\omega \in \Omega$ la suite $(S_k(\omega))$ est strictement croissante. Si $N(0, \ell) = n + 1$ alors il y a $n + 1$ indices k tels que $0 \leqslant S_k(\omega) \leqslant \ell$ et ce sont les $n + 1$ premiers d'où $S_n(\omega) \leqslant \ell < S_{n+1}(\omega)$. Ainsi, $\{N(0, \ell) = n + 1\} \subset \{S_n \leqslant \ell < S_{n+1}\}$. L'inclusion réciproque ainsi que les deux autres relations se justifient de manière analogue.

b) C'est l'inégalité de Bienaymé-Chebychev pour S_n d'espérance $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = nm$ et de variance $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = nv$ par indépendance des X_k.

2) On a dans $[0, +\infty]$:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geqslant \ell).$$

L'interversion des sommations est valide, s'agissant de réels positifs.

3) **a)** C'est l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\exp(\ell - S_n)$ d'espérance

$$\mathbb{E}(e^{\ell - X_1 - \ldots - X_n}) = e^{\ell}\mathbb{E}(e^{-X_1}) \ldots \mathbb{E}(e^{-X_n}) = e^{\ell}\mathbb{E}(e^{-X})^n.$$

b) $\mathbb{E}(e^{-X}) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i e^{-x_i} < 1$, d'où la convergence de $\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell)$ vers 0.

Ensuite, $\mathbb{P}(N(0, \ell) \geqslant n) = \mathbb{P}(S_{n-1} \leqslant \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par continuité décroissante, $\mathbb{P}(N(0, \ell) = \infty) = 0$.

Enfin, $\mathbb{E}(N(0, \ell)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(0, \ell) \geqslant n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ell}\mathbb{E}(e^{-X})^{n-1} = \dfrac{e^{\ell}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

c) On note $A_n = \{a \in \mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(S_n = a) \neq 0\}$, $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ et $D = A - A$ (ensembles dénombrables) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n,\ N(x, x + \ell) \geqslant k) \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ c\in A,\ c\leqslant x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b, S_{n+k-1} = c) \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ c\in A,\ c\leqslant x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b, S_{n+k-1} - S_n = c - b) \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ c\in A,\ c\leqslant x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{n+k-1} - S_n = c - b) && \text{(indépendance des } X_i\text{)} \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ c\in A,\ c\leqslant x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = c - b) && \text{(équidistribution des } X_i\text{)} \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ d\in A-b,\ d\leqslant x+\ell-b}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = d) \\
&\quad \leqslant \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ d\in D,\ d\leqslant \ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = d) \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 \leqslant \ell) \\
&\quad = \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 \leqslant \ell) \\
&\quad = \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n)\,\mathbb{P}(N(0, \ell) \geqslant k).
\end{aligned}$$

En sommant sur n on obtient $\mathbb{P}(N(x,x+\ell)\geqslant k)\leqslant \mathbb{P}(N(0,\ell)\geqslant k)$ ce qui implique par continuité décroissante $\mathbb{P}(N(x,x+\ell)=\infty)=0$ puis $\mathbb{E}(N(x,x+\ell)\leqslant \mathbb{E}(N(0,\ell))\leqslant \dfrac{e^{\ell}}{1-\mathbb{E}(\exp(-X))}$.

Deuxième partie

4) a) $f_n(x)$ est la n-ème somme partielle d'une série termes positifs (finis car g est bornée).

b) Pour $\omega\in\Omega$ on a $N(x-K,x)(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} g(x-S_k(\omega))=\sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\omega)$ et il s'agit de prouver que $\mathbb{E}(N(x-K,x))=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}(Y_k)=f(x)$. Pour ce faire, considérons le schéma d'interversion des limites suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Y_0+\ldots+Y_p\geqslant k) & \xrightarrow[\substack{n \text{ fixé}\\ p\to\infty}]{(1)} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(N(x-K,x)\geqslant k) \\
(2)\Big\downarrow{\scriptstyle\substack{n\to\infty\\ p \text{ fixé}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\
\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(Y_0+\ldots+Y_p\geqslant k)}_{\mathbb{E}(Y_0)+\ldots\mathbb{E}(Y_p)} & \xrightarrow[p\to\infty]{} & \begin{array}{c}\mathbb{E}(N(x-K,x))\\ \\ f(x)\end{array}
\end{array}$$

(1) a lieu par continuité croissante. Pour égaler les limites, il suffit de prouver l'uniformité de (2) par rapport au paramètre p. Et de fait :

$$0\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(Y_0+\ldots+Y_p\geqslant k)\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(N(x-K,x)\geqslant k),$$

quantité indépendante de p, et tendant vers 0 quand $n\to\infty$ en tant que reste d'une série convergente (on a vu que $\mathbb{E}(N(x-K,x)$ est finie en **3c**).

c) Car $g\leqslant \|g\|_\infty \mathbb{1}_{[0,K]}$.

d) La suite $(f_n(x))$ étant croissante et majorée, il y a finitude de $f(x)$ et convergence simple de f_n vers f. f est positive et est nulle sur $]-\infty,0[$ car les f_n le sont. Donc $\{x \text{ tq } f(x)\neq 0\}\subset\mathbb{R}^+$ et le support de f est lui aussi inclus dans $\mathbb{R}^+$. Enfin f est bornée car les f_n sont bornées par deux mêmes constantes.

5) On note $A=\{a\in\mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(X=a)\neq 0\}$ et $B=\{b\in\mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(Y=b)\neq 0\}$ (ensembles finis ou dénombrables) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) &= \sum_{(a,b)\in A\times B}\varphi(a,b)\,\mathbb{P}(X=a,Y=b)\\
&=\sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\varphi(a,b)\,\mathbb{P}(X=a)\,\mathbb{P}(Y=b)\\
&=\sum_{a\in A}\mathbb{E}(\varphi(a,Y))\,\mathbb{P}(X=a).
\end{aligned}$$

6) a)

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \mathbb{E}(g(x-S_0))+\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{E}(g(x-X_1-(X_2+\ldots+X_k))\\
&= g(x)+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=0}^{\infty}p_i\mathbb{E}(g(x-x_i-(X_2+\ldots+X_k)) && \text{(indépendance)}\\
&= g(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1}p_i\mathbb{E}(g(x-x_i-(X_2+\ldots+X_k))\\
&= g(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1}p_i\mathbb{E}(g(x-x_i-(X_1+\ldots+X_{k-1})) && \text{(équidistribution)}\\
&= g(x)+\sum_{i=0}^{\infty}p_i f_n(x-x_i).
\end{aligned}$$

b) On a pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) \leqslant g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i)$, d'où en faisant tendre n vers l'infini à x fixé :

$$f(x) \leqslant g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i).$$

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) \geqslant g(x) + \sum_{i=0}^{k} p_i f_n(x - x_i)$, puis en faisant tendre n vers l'infini à x, k fixés : $f(x) \geqslant g(x) + \sum_{i=0}^{k} p_i f(x - x_i)$, et enfin en faisant tendre k vers l'infini :

$$f(x) \geqslant g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i).$$

7) a) C'est vrai pour $n = 0$ et si ça l'est pour n alors :

$$\mathbb{E}(h(x - S_{n+1})) = \mathbb{E}(h(x - X_{n+1} - S_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathbb{E}(h(x - x_i - S_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i h(x - x_i) = h(x).$$

b) Pour $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $|h(x - S_n(\omega))| \leqslant \|h\|_\infty \mathbb{1}_{\{S_n \leqslant x\}}(\omega)$ donc

$$|h(x)| \leqslant |\mathbb{E}(h(x - S_n))| \leqslant \mathbb{E}(|h(x - S_n)|) \leqslant \|h\|_\infty \mathbb{P}(S_n \leqslant x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c) Si f, f' sont deux solutions de (E) alors $h = f - f'$ vérifie les hypothèses de la question précédente donc est nulle.

8) a) C'est l'ensemble A introduit dans la réponse à **3c**.

b) C'est la formule de transfert pour $\mathbb{E}(g(x - S_k))$.

c) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = y_i) g(x - y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = y_i) g(x - y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} q_{i,n} g(x - y_i)$.

Comme les X_j sont à valeurs strictement positives, pour tout i les évènements $\{S_k = y_i\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et donc $q_{i,n} = \mathbb{P}(\exists\, k \in [\![0, n]\!] \text{ tq } S_k = y_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(\exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tq } S_k = y_i) = q_i$ par continuité croissante. On a donc $f_n(x) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i)$ (inégalité dans $[0, +\infty]$) puis en faisant tendre n vers l'infini à x fixé : $f(x) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i)$. L'inégalité inverse se démontre comme en **6b** en minorant $f_n(x)$ par une somme finie. En particulier la série $\sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i)$ est convergente. La deuxième relation demandée s'obtient en prenant $g = \mathbb{1}_{[0,K]}$.

9) a) Soit $[a, b]$ un segment. Pour $x \in [a, b]$ et $i \in \mathbb{N}$ on a $|q_i g(x - y_i)| \leqslant \|g\|_\infty q_i \mathbb{1}_{[a-K,b]}(y_i)$, quantité indépendante de x et dont la série converge vers $\|g\|_\infty \mathbb{E}(N(a - K, b))$.

b) g étant continue à support compact est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ associé : $|g(s) - g(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tous s, t tels que $|s - t| \leqslant \delta$. Quitte à le diminuer, on peut supposer $\delta \leqslant 1$. Considérons $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $|s - t| \leqslant \delta$ avec par exemple $s \leqslant t$:

$$\begin{aligned}
|f(s) - f(t)| &= \Big|\sum_{i=0}^{\infty} q_i(g(s - y_i) - g(t - y_i))\Big| \\
&= \Big|\sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[s-K,t]} q_i(g(s - y_i) - g(t - y_i))\Big| \\
&\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[s-K,t]} q_i|g(s - y_i) - g(t - y_i)| \\
&\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[s-K,t]} q_i \varepsilon \\
&= \varepsilon \mathbb{E}(N(s - K, t)) \\
&\leqslant \varepsilon \frac{e^{t-s+K}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))} && \text{(question 3c)} \\
&\leqslant \varepsilon \frac{e^{1+K}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}.
\end{aligned}$$

c) g' est continue et à support compact. Elle est donc bornée. Il en résulte que la série des dérivées $\sum_{i=0}^{\infty} q_i g'(x-y_i)$ est normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$ comme en **9a**, donc que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i g'(x-y_i)$. On a ensuite

$$|f'(x)| \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[x-H,x]}^{\infty} q_i\|g'\|_\infty = \mathbb{E}(N(x-K,x))\|g'\|_\infty \leqslant \frac{e^K\|g'\|_\infty}{1-\mathbb{E}(e^{-X})}$$

donc f' est bornée. La continuité uniforme de f' se démontre comme en **9b**. Enfin, comme la série $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ est absolument convergente, on peut dériver (E) terme à terme ce qui donne la dernière relation.

Troisième partie

10) a) $nx + k(y-x) = (n-k)x + ky$ et $n-k, k$ ne sont pas simultanément nuls.

b) $\mathbb{N}^*$ et $]0,+\infty[$ sont stables par addition avec $r(\mathbb{N}^*) = 1$ et $r(]0,+\infty[) = 0$.

11) a) C'est une propriété de la borne inférieure.

b) Les deux points $na+kd, na+(k+1)d$ appartiennent bien à l'intersection d'après **10a** et tout autre point de $[na+kd, na+(k+1)d]$ est à une distance moindre que $d/2$ de l'une des deux bornes. Comme $d/2 < r(\Lambda)$, il n'appartient pas à Λ.

c) Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } nd > a\}$, qui existe et est supérieur ou égal à 1 car a et d sont strictement positifs. On a $n_0a + n_0d > (n_0+1)a$ par construction, et $n_0a + (n_0-1)d \leqslant (n_0+1)a < n_0a + n_0d$. Ces trois nombres appartiennent à Λ donc les deux premiers sont égaux d'après la question précédente. Ainsi $a = (n_0-1)d$.

d) Soit $x \in \Lambda$ tel que $x \geqslant n_0a$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$ puis il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $na + kd \leqslant x < na + (k+1)d$. On a $n \geqslant n_0$ et $k \leqslant n$ car $na + (n+1)d > na + n_0d > (n+1)a > x$ donc $x = na + kd$ d'après **11b**. Ainsi tout élément de Λ suffisamment grand est divisible par d. Pour $x \in \Lambda$ quelconque il existe deux multiples successifs mx, $(m+1)x$ qui relèvent du cas précédent. Ils sont divisibles par d et leur différence, x, l'est aussi. Ainsi $\Lambda \subset d\mathbb{Z}$.

12) a) Soient $a, b \in \Lambda$ tels que $0 < b-a < \eta$. Λ contient toutes les combinaisons $na + k(b-a)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. En particulier, tout segment de longueur η dont la borne inférieure appartient à $[na, nb]$ contient un élément de Λ. On a $(n+1)a \leqslant nb$ si $a \leqslant n(b-a)$, ce qui a lieu dès que n est assez grand, mettons $n \geqslant n_0$. Alors $\bigcup_{n=n_0}^{\infty}[na, nb] = [n_0a, +\infty[$ donc $A = n_0a$ convient.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que $|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. Considérons une suite de réels (x_n) telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour n assez grand ($n \geqslant n_0$) il existe $y_n \in \Lambda$ tel que $x_n \leqslant y_n \leqslant x_n + \eta$. La suite $(y_n)_{n\geqslant n_0}$ est à valeurs dans Λ et tend vers l'infini donc pour n encore plus grand ($n \geqslant n_1$) on a $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \varepsilon$ et $|f(y_n)| \leqslant \varepsilon$ d'où $|f(x_n)| \leqslant 2\varepsilon$. On a ainsi prouvé que $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par caractérisation séquentielle de la limite.

Quatrième partie

13) a)

$$\begin{aligned}
h(0) = \mathbb{E}(h(-S_n)) &= \sum_{i=0}^{\infty} h(-y_i)\,\mathbb{P}(S_n = i) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\neq x} h(-y_i)\,\mathbb{P}(S_n = i) + h(-x)\,\mathbb{P}(S_n = x) \\
&\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\neq x} h(0)\,\mathbb{P}(S_n = i) + h(-x)\,\mathbb{P}(S_n = x) \\
&= h(0)\,\mathbb{P}(S_n \neq x) + h(-x)\,\mathbb{P}(S_n = x).
\end{aligned}$$

On en déduit $(h(0) - h(-x))\mathbb{P}(S_n = x) \leqslant 0$, puis $h(0) \leqslant h(-x)$ et enfin l'égalité.

b) Si $x, y \in \Lambda_X \setminus \{0\}$, soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(S_n = x) > 0$ et $\mathbb{P}(S_p = y) > 0$. Alors par équidistribution on a aussi $\mathbb{P}(S_{n+p} - S_n = y) > 0$, d'où

$$\mathbb{P}(S_{n+p} = x+y) \geqslant \mathbb{P}(S_n = x, S_{n+p} - S_n = y) = \mathbb{P}(S_n = x)\,\mathbb{P}(S_{n+p} - S_n = y) > 0$$

donc $x + y \in \Lambda_X \setminus \{0\}$, ce qui prouve la stabilité par addition. Ensuite, si $r(\Lambda_X \setminus \{0\}) \neq 0$ alors $\Lambda_X \setminus \{0\} \subset d\mathbb{Z}$ pour un certain $d > 0$ et en particulier $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(S_1 \in d\mathbb{Z}) = 1$ en contradiction avec l'hypothèse faite sur X.

c) Appliquer **12b** à $x \mapsto h(-x) - h(0)$.

d) h est continue sur $\mathbb{R}^-$ et tend en $-\infty$ vers sa valeur maximale donc il existe un réel $c \leqslant 0$ tel que $h(c) = \min(h(t),\ t \leqslant 0)$. En reprenant **13a**, on prouve que $h(c - x) = h(c)$ pour tout $x \in \Lambda_X$, d'où en faisant tendre x vers $+\infty$ dans Λ_X : $h(c) = h(0)$, c'est-à dire : h est constante sur $\mathbb{R}^-$. On peut alors appliquer **7b** à la fonction $x \mapsto h(x) - h(0)$ car $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$: cette fonction est nulle et ainsi h est constante sur $\mathbb{R}$.

14) a) f' étant bornée, la borne supérieure existe et est une fonction de x bornée, décroissante. Une telle fonction admet une limite finie en $+\infty$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver $y_n \geqslant n$ tel que $|\sup(f'(t),\ t \geqslant n) - f'(y_n)| \leqslant \frac{1}{n}$.

c) On peut intervertir $\lim_{k\to\infty,\ t \text{ fixé}}$ et $\sum_{i=0}^{\infty}$ dans la relation $f'(t+t_k) = g'(t+t_k) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f'(t+t_k-x_i)$ car $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ est absolument convergente et f' est bornée. Il vient : $\forall t \in \mathbb{R},\ \xi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \xi(t - x_i)$ car g' est nulle au delà de K.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f'(x) - f'(y)| \leqslant \varepsilon$. Par translation, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|x - y| \leqslant \delta \Longrightarrow |\xi_k(x) - \xi_k(y)| \leqslant \varepsilon$ puis, par passage à la limite : $|x - y| \leqslant \delta \Longrightarrow |\xi(x) - \xi(y)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi ξ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On montre de même qu'elle est bornée et, par construction, elle atteint son maximum en $t = 0$ avec $\xi(0) = c$. Alors on peut appliquer **13** qui conclut à la constance de ξ.

d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme il y a convergence uniforme sur tout segment, on peut passer à la limite ($k \to \infty$, a fixé) dans la relation : $|\int_{u=0}^{a} f'(t_k+u)\,du| = |f(t_k+a) - f(t_k)| \leqslant 2\|f\|_\infty$ ce qui donne : $|ca| \leqslant 2\|f\|_\infty$. Et a est arbitraire, donc $c = 0$.

e) Car $\inf(f'(u),\ u \geqslant t) \leqslant \quad f'(t) \quad \leqslant \sup(f'(u),\ u \geqslant t)$.

f) Car $\inf(f'(u),\ u \geqslant t) \leqslant \dfrac{f(t+\ell) - f(t)}{\ell} \leqslant \sup(f'(u),\ u \geqslant t)$ lorsque $\ell > 0$.

18) $\mathbb{E}(N(x, x + \ell)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[0,\ell]}(x + \ell - S_k)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{m}$. Le nombre moyen de sommes comprises dans un intervalle donné de longueur ℓ est de l'ordre de la longueur de cet intervalle divisée par l'écart moyen entre deux sommes successives. Cette propriété est manifestement fausse si X est à valeurs dans $d\mathbb{Z}$ et $\ell < d$.

* *
*