Ce qui est marqué en jaune est Corrigé à présent.
Je corrigerai le reste après.

Systèmes Linéaires. Rang et Inverse de Matrices

Exercice 1

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'apllication linéaire canoniquement associée.

   i) Calculer rg(M).

   ii) Chercher ker(f) et en préciser une base.

   iii) Déterminer Im(f) et en préciser une base.

2) Répondre aux questions de 1) dans chacun des cas suivants :

   i) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

   ii) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

   iii) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

   iv) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Calculer rg(f) dans chacun des cas suivants, pui dire si f est surjective, injective, bijective. (Justifier vos réponses)

1) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+y+z, x-y+z, x+y-z) \end{array} \right.$

2) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P'(2)) \end{array} \right.$

3) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x-y, x+y) \end{array} \right.$

4) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+y+z, x-y+z) \end{array} \right.$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer rg(B), le rang de la famille B et dire si B est une base de E.

1) $E=\mathbb{R}^3$. B$=(u,v,w)$ où $\left\{\begin{array}{lll} u & = & (1,1,2) \\ v & = & (1,2,1) \\ w & = & (2,1,1) \end{array}\right.$

2) $E=\mathbb{R}_2[X]$. B$=(P_1,P_2,P_3)$ où $\left\{\begin{array}{lll} P_1 & = & (X+1)^2 \\ P_2 & = & (X-1)^2 \\ P_3 & = & 1+X+X^2 \end{array}\right.$

Exercice 4

Posons $A_\alpha=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

1) Calculer $\mathrm{rg}(A_\alpha)$.

2) Calculer A_α^{-1} quand A_α est inversible.

Exercice 5

Considérons le système homogène suivant :

$$(H):\left\{\begin{array}{lll} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5 & = & 0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5 & = & 0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Notons S_H l'espace des solutions de (H).

1) Calculer $\dim(S_H)$

2) Chercher une base de S_H.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, calculer l'inverse A^{-1} sous réseve d'existence :

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 7

Résoudre les systèmes homogènes suivants, et préciser pour chacun une base de l'espace des solutions.

1) $(H_1):\left\{\begin{array}{lll} 2x+4y-4z & = & 0 \\ 3x+9y-6z & = & 0 \\ 4x+17y-11y & = & 0 \end{array}\right.$

2) $(H_2):\left\{\begin{array}{lll} -x+6y-z & = & 0 \\ 2x-5y+3z & = & 0 \end{array}\right.$

3) $(H_3) : \begin{cases} x+y-z+t & = & 0 \\ 2x-y+3z-t & = & 0 \end{cases}$

Exercice 8

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Déterminer ker(A-I_3) et ker(A+I_3).
Préciser pour chacun une base.

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Déterminer ker(B-I_3) et en préciser une base.

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Déterminer ker(C-I_3) et en préciser une base.

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Exercice 1

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'apllication linéaire canoniquement associée.

i) Calculer rg(M).

ii) Chercher ker(f) et en préciser une base.

iii) Déterminer Im(f) et en préciser une base.

i) Calculer rg(M).

$$rg(M) = rg\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le pivot doit être non nul

$$= rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

pivot non nul

$$= rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$2^{ème}$ pivot non nul

$$= rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$= 3$; qui est le nombre de pivots non nuls

ii) Chercher ker(f) et en préciser une base.

f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Alors $\begin{cases} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \underset{B}{\text{mat}}(f) = M \text{ ; où } B = (e_1, e_2, e_3) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^3 \end{cases}$

ker(f) = ?

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$(x, y, z) \in \ker(f) \iff f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ On passe matriciellement

$$\iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ x = -y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ z = -z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Enfin : $\boxed{\ker(f) = \{(0,0,0)\} \text{ n'a pas de base.}}$

Méthode 2

On a $rg(M) = 3$ alors M inversible

d'où f est aussi inversible

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \ker(f) = \{(0,0,0)\}, \text{ n'a pas de base.} \\ Im(f) = \mathbb{R}^3 \text{ ayant la base canonique de } \mathbb{R}^3 \text{ comme base.} \end{cases}}$$

iii) Déterminer Im(f) et en préciser une base.

Voir ii).

2) Répondre aux questions de 1) dans chacun des cas suivants :

i) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

i) Calculer rg(M).

$$rg(M) = rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

le pivot (non nul)

$$= rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$2^{ème}$ pivot (non nul)

$$= rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

La matrice est échelonnée.

Le nombre de pivots non nuls obtenus est égale à 2.

D'où :

$$rg(M) = 2$$

$\square$

ii) Chercher ker(f) et en préciser une base.

f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Alors $\begin{cases} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \underset{B}{mat}(f) = M \end{cases}$; où $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\ker(f) = ?$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x = z \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -4z \\ x = z \\ 2y = -4z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (z, -2z, z)$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = z.(1,-2,1)$

$(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,-2,1))$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ker(f) = \mathrm{Vect}\big((1,-2,1)\big) \\ \big((1,-2,1)\big) \text{ en est une base} \end{array}}$$

iii) Déterminer Im(f) et en préciser une base.

On a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ car $rg(f) = rg(M) = 2$.

Déterminons deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(f)$, alors ils vont constituer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

On a : $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

où $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Et on a $\begin{cases} f(e_1) = (1,-1,1) \in \mathrm{Im}(f) \\ f(e_2) = (2,0,2) \in \mathrm{Im}(f) \end{cases}$

Et que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont clairement pas colinéaires.

D'où $\big((1,-1,1)\,;\,(2,0,2)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$

Remarque : $\boxed{\text{On peut prendre } (1,0,1) \text{ à la place de } (2,0,2)}$

iii) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

i) Calculer rg(M).

$$rg(M) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez appliquer la méthode de Gauss si vous voulez.
Mais c'est plus rapide que ça

Le rang de M est égal à celui de ses lignes.

La ligne L_1 et la ligne L_2 sont colinéaires ($L_2 = 2L_1$)

D'où $rg(M) = rg(1 \quad -1 \quad 2 \quad -2)$

$= 1$

ii) Chercher ker(f) et en préciser une base.

f l'application linéaire canoniquement associé à M.

Alors $\begin{cases} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2) \\ \underset{B,B'}{mat}(f) = M \end{cases}$; où $\begin{cases} B = (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^4 \\ B' = (e'_1, e'_2) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^2 \end{cases}$

ker(f) = ?

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$(x, y, z, t) \in \ker(f) \iff f(x, y, z, t) = (0, 0)$

$\iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z - 2t = 0 \\ 2x - 2y + 4y - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x - y + 2z - 2t = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = y - 2z + 2t$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z,t) = (y - 2z + 2t, y, z, t)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z,t) = y(1,1,0,0) + z(-2,0,1,0) + t(2,0,0,1)$$

$$(x,y,z,t) \in \ker(f) \Longleftrightarrow (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\big((1,1,0,0);(-2,0,1,0);(2,0,0,1)\big)$$

D'où : $\boxed{\ker(f) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0,0);(-2,0,1,0);(2,0,0,1)\big)}$

iii) Déterminer Im(f) et en préciser une base.

On a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ car $rg(f) = rg(M) = 1$.

Prenons alors un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$; il va en former une base.

On a : $\underset{B,B'}{\mathrm{mat}}(f) = M = \begin{array}{c|cccc} & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \\ \hline e'_1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ e'_2 & 2 & -2 & 4 & -4 \end{array}$

Alors $f(e_2) = (1, 2) \in Im(f) \setminus \{0\}$

D'où : $Im(f) = Vect((1, 2))$

et $((1, 2))$ est une base de $Im(f)$

$\square$

Exercice 2

Calculer rg(f) dans chacun des cas suivants, pui dire si f est surjective, injective, bijective. (Justifier vos réponses)

3) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x-y, x+y) \end{array} \right.$

i) rg(f) = ?

$rg(f) = rg\left(\underset{B_1, B_2}{mat}(f)\right)$, où $\begin{cases} B_1 \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^2 \\ B_2 \text{ " " " " } \mathbb{R}^3 \end{cases}$

$= rg\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= 2$, c'est le rang des deux colonnes, qui ne sont pas colinéaires.

ii) f est-elle surjective ?

On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, alors :

f surjective $\Leftrightarrow Im(f) = \mathbb{R}^3$ (l'espace d'arrivée)

$\Leftrightarrow dim(Im(f)) = 3 \quad (dim(\mathbb{R}^3) = 3)$

$\Leftrightarrow rg(f) = 3$

Or $rg(f) = 2$, alors f n'est pas surjective.

iii) f est-elle injective ?

On f injective $\Leftrightarrow ker(f) = \{0\}$

et on a d'après le théorème du rang appliqué à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$:

départ $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^2)}_{=2} = \dim(\ker f) + \underbrace{rg(f)}_{=2}$

D'où $\dim(\ker(f)) = 0$

$\Longrightarrow \ker(f) = \{0\}$

Enfin f est injective

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer rg(B), le rang de la famille B et dire si B est une base de E.

2) $E = \mathbb{R}_2[X]$. B$= (P_1, P_2, P_3)$ où $\begin{cases} P_1 &= (X+1)^2 \\ P_2 &= (X-1)^2 \\ P_3 &= 1 + X + X^2 \end{cases}$

i) $rg(B) = ?$

$rg(B) = rg\left(\underset{B_c}{mat}(B)\right)$; où $B_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; car $B = (P_1, P_2, P_3)$ et $\begin{cases} P_1 = 1 + 2X + X^2 \\ P_2 = 1 - 2X + X^2 \\ P_3 = 1 + X + X^2 \end{cases}$

On peut appliquer la méthode standard du pivot de Gauss.

Mais il s'avère qu'on peut faire plus rapidement, en remarquant que que les lignes L_1 et L_3 sont égales.

Ainsi :

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ \underline{1} & \underline{1} & 1 \end{pmatrix}$$; le rang d'une matrice est égal à celui de ses lignes.

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$= 2$, car les deux lignes ne sont pas colinéaires.

ii) B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

On a $\mathrm{Card}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$

Alors : $\boxed{B \text{ base de } \mathbb{R}_2[X] \iff \mathrm{rg}(B) = 3}$

Or $\mathrm{rg}(B) = 2$, alors B n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$. $\square$

Exercice 4

Posons $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Calculer $\mathrm{rg}(A_\alpha)$.

2) Calculer A_α^{-1} quand A_α est inversible.

1) Calculer $\mathrm{rg}(A_\alpha)$.

pivot nul

$$\mathrm{rg}(A_\alpha) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$ $L_1 \longleftrightarrow L_2$ le pivot est maintenant non nul

1er pivot non nul

2ème pivot non nul

$$\mathrm{rg}(A_\alpha) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

Cas 1 : Si $\alpha \neq 1$

1er pivot non nul

2ème pivot non nul

3ème pivot non nul

$$\mathrm{rg}(A_\alpha) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha-1} \end{pmatrix}$$

$= 3$; il y'a trois pivots non nuls.

Cas 2 : Si $\alpha=1$

$$\text{rg}(A_\alpha) = \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1^{er} pivot non nul

$2^{ème}$ pivot non nul

$= 2$; il y'a deux pivots non nuls.

$\square$

2) Calculer A_α^{-1} quand A_α est inversible.

Si $\alpha \neq 1$, on a $\text{rg}(A_\alpha) = 3$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$

Alors A_α inversible.

Mais si $\alpha = 1$, $\text{rg}(A_\alpha) = 2 \neq 3$, donc A_1 n'est pas inversible.

Supp que $\alpha \neq 1$.

Déterminons A_α^{-1} :

Faisons via la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha-1} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad\Bigg|\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha-1) & (\alpha-1) & 0 \\ 0 & (\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha-1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow (\alpha-1)L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow (\alpha-1)L_2 - L_3 \end{array} \qquad\Bigg|\qquad \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -1 \\ (\alpha-1) & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha-1) & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{(\alpha-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad\Bigg|\qquad \begin{pmatrix} -(\alpha-1) & \alpha-1 & 0 \\ (\alpha-1) & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hookrightarrow\, I_3} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{\alpha-1} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{\alpha-1} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{\alpha-1} L_3 \end{array} \qquad\Bigg|\qquad \underbrace{\frac{1}{\alpha-1}\begin{pmatrix} -(\alpha-1) & \alpha-1 & 0 \\ (\alpha-1) & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\hookrightarrow\, (A_\alpha)^{-1}}$$

$$(A_\alpha)^{-1} = \frac{1}{\alpha-1}\begin{pmatrix} -(\alpha-1) & \alpha-1 & 0 \\ (\alpha-1) & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Méthode 2 : (Méthode de Cramer)

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\det(A_\alpha)} \cdot {}^t\mathrm{Com}(A_\alpha)$$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(A_\alpha) = (0+1+1)-(1+0+\alpha) = (1-\alpha)$$

$$\mathrm{Com}(A_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-1 & -(\alpha-1) & 0 \\ -(\alpha-1) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{Com}(A_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-1 & -(\alpha-1) & 0 \\ -(\alpha-1) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\det(A_\alpha)} \cdot {}^t\mathrm{Com}(A_\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \alpha-1 & -(\alpha-1) & 0 \\ -(\alpha-1) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 5

Considérons le système homogène suivant :

$$(H):\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5 &= 0\\ x_2+x_3-2x_4+2x_5 &= 0\\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5 &= 0\end{cases}$$

Notons S_H l'espace des solutions de (H).

1) Calculer $\dim(S_H)$

2) Chercher une base de S_H.

1) Calculer $\dim(S_H)$

$\dim(S_H) = n - r$, où $\begin{cases} n=5 : \text{le nombre d'inconnues} \\ r \text{ le rang du système ; càd le rang de sa matrice}\end{cases}$

$$r = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & -4\end{pmatrix}$$ (échelonnons la matrice)

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & -6\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-12} & 0\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

$r = 3$ « Matrice échelonnée, avec 3 pivots non nuls. »

$$\boxed{\dim(S_H) = 2}$$

2) Chercher une base de S_H.

Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. On a :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in S_H \iff \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0\\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0\\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5=0\end{cases}$$

On échelonne ce système, exactement comme on vient d'échelonner sa matrice. On obtient :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in S_H \iff \begin{cases} \boxed{x_1}+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0\\ \boxed{x_2}+x_3-2x_4+2x_5=0\\ -12\boxed{x_4}=0\end{cases}$$

« x_1, x_2, x_4 : les inconnues principales ; celles des pivots non nuls »

« x_3, x_5 : les inconnues secondaires »

$$\iff \begin{cases} \boxed{x_1}+2x_2+3x_4=x_3-x_5\\ \boxed{x_2}-2x_4=-x_3-2x_5\\ -12\boxed{x_4}=0\end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-12} & 0\end{pmatrix}}^{\text{matrice échelonnée}}$$

On résout ce système triangulaire supérieur, d'inconnues x_1, x_2, x_4, par remontée :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in S_H \iff \begin{cases} x_1=3x_3+3x_5\\ x_2=-x_3-2x_5\\ x_4=0\end{cases}$$

$$\iff (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(3x_3+3x_5, -x_3-2x_5, x_3, 0, x_5)$$

$$\iff (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_3(3,-1,1,0,0)+x_5(3,-2,0,0,1)$$

$$\iff \boxed{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in \text{Vect}\big((3,-1,1,0,0),(3,-2,0,0,1)\big)}$$

Enfin :

$$S_H=\text{Vect}\big((3,-1,1,0,0),(3,-2,0,0,1)\big)$$

$\big((3,-1,1,0,0),(3,-2,0,0,1)\big)$ est une base de S_H.

Fin

Exercice 7

Résoudre les systèmes homogènes suivants, et préciser pour chacun une base de l'espace des solutions.

3) $(H_3) : \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x - y + 3z - t = 0 \end{cases}$

Notons S_3 : l'espace des solutions de (H_3).

$$(x,y,z,t) \in S_3 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z+t = 0 \\ 2x-y+3z-t = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z+t = 0 \\ -3y+5z-3t = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

x, y : inconnues principales ; on garde à gauche

z, t : inconnues secondaires, on déplace vers l'autre côté.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = z-t \\ -3y = -5z+3t \end{cases}$$

Système triangulaire supérieur d'inconnues x, y les inconnues principales : On le résout par remontée.

$$(x,y,z,t) \in S_3 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = \frac{5}{3}z - t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z,t) = \left(-\frac{2}{3}z, \frac{5}{3}z - t, z, t\right)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z,t) = z\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0\right) + t(0,-1,0,1)$$

$$\boxed{(x,y,z,t) \in S_3 \Longleftrightarrow (x,y,z,t) \in \text{Vect}\left(\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0\right); (0,-1,0,1)\right)}$$

$$S_3 = \text{vect}\left(\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0\right); (0, -1, 0, 1)\right)$$

$\left(\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0\right); (0, -1, 0, 1)\right)$ en est une base

$\square$

Exercice 8

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer ker(B-I_3) et en préciser une base.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B - I_3) \iff (B - I_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

équations identiques

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B - I_3) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\ker(B - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en est une base.

$\square$

FIN