

Probabilités Partie 1

Résumé Lacunaire

1) Notion de tribu

On dispose d'une expérience aléatoire (c'est qu'on ne peut pas prévoir son résultat).

Vocabulaire

L'ensemble des issues (ou possibilités) de cette expérience aléatoire s'appelle l'univers et se note Ω .

Résumé

Si T est une tribu sur Ω , on a :

1) \emptyset et $\Omega \in T$

2) $A \in T \Leftrightarrow \bar{A} \in T$

3) $\forall A, B \in T, A \setminus B \in T$

4) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T , alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T.$$

5) Si $(\forall 1 \leq k \leq n, A_k \in T)$ alors $\bigcup_{k=1}^n A_k \in T$ et $\bigcap_{k=1}^n A_k \in T$.

2) Notion de probabilité

Résumé

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé.

1) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

2) Si A et B sont deux événements compatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de \mathcal{T} alors :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4) Supposons que $A \subset B$. On a :

i) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

ii) $P(A) \leq P(B)$

5) Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

6) En général, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Vocabulaire

- 1) Le triplet (Ω, T, P) s'appelle **espace**
- 2) Les éléments de T s'appellent **é**
- 3) Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux événements **in**
- 4) \emptyset : l'événement **in**
 Ω : l'événement **C**
 \bar{A} : l'événement **C** de A .
- 5) Si $P(A) = 0$, A est dit événement **quasi**
Si $P(A) = 1$, A est dit événement **quasi**
- 6) $A \cap B$ se lit : A **et** B .
 $A \cup B$ se lit : A **ou** B .
- 7) $A \subset B$ se lit : « A **est inclus dans** B »

Déf

On dit que A_1, \dots, A_n forment un **partitions** si et ssi :

1) $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

2) $\bigsqcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

NB

On dit de même que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un

si et si :

$$1) \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$2) \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$$

3) Probabilité conditionnelle

Dans toute la suite du chapitre, (Ω, \mathcal{T}, P) est un espace probabilisé.

Déf

Supposons que $P(B) \neq 0$.

La probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé se note $P(A|B)$ ou $P_B(A)$, et est définie par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prop

Supposons que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. On a :

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$$

Prop

Supposons que $P(B) \neq 0$.

L'application $A \mapsto P(A|B)$ est une probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) .

Réflexes

$$1) P(\bar{A} | B) = \dots$$

$$2) P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i | B\right) = \sum_{i=1}^n \dots, \text{ si les } A_i \text{ sont 2 à 2}$$

incompatibles.

4) Formule des probabilités totales

Prop

Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements tel que :

$$(\forall i, P(A_i) \neq 0)$$

Pour tout événement B on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i | B)$$

Càd :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \times P(B | A_i)$$

5) Formule de Bayes

Prop (Formule de Bayes)

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) (A_1, \dots, A_n) \text{ est un système complet d'événements.} \\ 2) \forall i, P(A_i) \neq 0 \end{array} \right.$

Alors :

$$\forall B \in T, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(A_j | B) = \frac{P(A_j) \times P(B | A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \times P(B | A_i)}$$

N.B :

En général les élèves ne mémorisent pas cette formule de Bayes mais ils la redémontrent en deux lignes en cas de besoin.

6) Formule des probabilités composées

Prop (Formule des probabilités composées)

Soient A_1, \dots, A_n des événements quelconques tels que :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$$

On a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

7) Indépendance d'événements

Prop et déf

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $P(A/B) = P(A)$

ii) $P(B/A) = P(B)$

iii) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

2) Si l'une de ces propositions est vérifiée, on dit que les événements A et B sont **indépendants**.

Vocabulaire

A_1, \dots, A_n sont dits **deux à deux indépendants** si et si :

$\forall i \neq j, A_i$ et A_j sont indépendants

Déf

Les événements A_1, \dots, A_n sont dits **indépendants** si et si :

pour toute partie finie I de $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$$

Vocabulaire

On parle aussi de « **mutuellement indépendants** ».

Prop

$(A_1, A_2 \text{ et } A_3 \text{ sont indépendants})$

\Leftrightarrow

{ 1) A_1, A_2 et A_3 sont deux à deux indépendants .

2) $P(\text{[redacted]}) = \text{[redacted]}$

Prop

$S_n (A_1, \dots, A_n \text{ sont indépendants})$

$N_{ss} (A_1, \dots, A_n \text{ sont deux à deux indépendants})$

Attention

La réciproque est [redacted]

Fin