

Concours National Commun
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2
Session 2024 - Filière MP

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée: 4 heures

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ a base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Vérifier que $PQ = 4I_3$.
b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1} .
2. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.
- b) Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.
- c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.
3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.
b) Déterminer, pour tout entier naturel n , D^n en fonction de n .
c) En déduire pour tout entier naturel n , l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

Problème.

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n , $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des endomorphismes de E . On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \text{id}_E$ et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E . On note $\chi_f(X) = \det(X \text{id}_E - f)$ le polynôme caractéristique de f et on rappelle que $\chi_f(f) = 0$ où 0 désigne l'application nulle de E .

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra introduire le polynôme caractéristique de M défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$. On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f .

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.
4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.
5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,
6. On considère pour tout entier naturel k , φ_k la restriction de f à $\mathcal{I}_k$.
 - a) Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap \mathcal{I}_k)$.
 - b) En déduire que la suite $(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.
 - a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.
 - b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.
 - c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.
 - d) En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.
2. On suppose de plus que $U^n = 0$.
 - a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.
 - b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n .
 - c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E .
 - d) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.
3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n - 1$ sont semblables.

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f .

2. Montrer que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.
3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.
- Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .
 - Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k .
 - Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k .
4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tel que chaque bloc est une matrice de $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ de la forme $A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$.

Partie 4: Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un p -cycle de f .

- Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un p -cycle de f .
 - Montrer que $f^p = \text{id}_E$.
 - Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$ admet un maximum noté γ .
 - Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
 - Montrer que $\gamma = n$.
 - Déterminer le nombre des valeurs propres distinctes de f .
- Soit $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un n -cycle de f .
 - Justifier que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E .
 - Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_{x_0}$.
 - On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$, où $\overline{\omega}$ désigne le conjugué de ω .
 Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, vérifier que U_k est un vecteur propre de G associé à une valeur propre α_k à déterminer.

3. Soit $M = (m_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

a) Calculer $M \overline{M}$.

b) En déduire que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1}

4. Soit $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que H est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de H et une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H .

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$.

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à $\mathcal{T}$.

3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ telle que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.

5. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$.

- FIN DE L'ÉPREUVE -

CORRECTION

Exercice

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Vérifier que $PQ = 4I_3$.

Juste faire les calculs.

1. a) Vérifier que $PQ = 4I_3$.

- b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1} .

$$\text{On a } P \cdot \left(\frac{1}{4} Q \right) = I_3$$

$$\text{Donc } P \text{ est inversible, et donc } P^{-1} = \frac{1}{4} Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.
- b) Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.

2) a)

On trouve que $Au = u$.

Alors u est un vecteur propre de A , associé à la valeur propre $\alpha = 1$.

2. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.
- b) Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.

On trouve que $Av = 2v$ et $Aw = 2w$.

D'où v et w sont deux vecteurs propres de A , associés à la même valeur propre $\beta = 2$.

2. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.
- Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.
- Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.

2) c)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On a $A = \underset{B}{\text{mat}}(f)$; $B = (e_1, e_2, e_3)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Et on a $\begin{cases} AU = U \\ U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$, alors $f(e_1) = e_1$, où $e_1 = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$

De même, on a $Av = 2v$ et $Aw = 2w$, où $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $f(e_2) = 2e_2$ et $f(e_3) = 2e_3$, où $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (2, -1, 1)$

On a ainsi :

$$f(e_1) = e_1$$

$$e_1 = (1, 2, 1)$$

$$f(e_2) = 2e_2$$

$$e_2 = (0, 1, 1)$$

$$f(e_3) = 2e_3$$

$$e_3 = (2, -1, 1)$$

Notons $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

S est une base de $\mathbb{R}^3$ (facile à montrer).

Alors on a $\text{mat}_B(f) = P \text{mat}_S(f) P^{-1}$, où $P = P_{B,S}$

D'autre part,

$$\text{mat}_S(f) = \begin{matrix} & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \\ \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{notons-la } \mathcal{D}.$$

$$P = P_{B,S} = \text{mat}_B(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ car } \begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 2, 1) \\ \varepsilon_2 = (0, 1, 1) \\ \varepsilon_3 = (2, -1, 1) \end{cases}$$

Enfin on a :

$$A = P \mathcal{D} P^{-1}, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{D} = \text{diag}(1, 2, 2)$$



3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n , D^n en fonction de n .

Initialisation : Pour $n=0$

$$\text{On a } A^0 = I_3 \text{ et } PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$$

$$\text{d'où } A^0 = PD^0P^{-1}.$$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ et M. que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\text{On a : } A^{n+1} = A^n \cdot A$$

$$= \underbrace{PD^nP^{-1}}_{=I_3} \cdot PD^nP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)}$$

$$= PD^n \cdot D^n P^{-1}$$

$$= PD^{n+1}P^{-1}.$$

3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.
b) Déterminer, pour tout entier naturel n , D^n en fonction de n .

$$\text{On a } D = \text{diag}(1, 2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, D^n = \text{diag}(1, 2^n, 2^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$



3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.
 b) Déterminer, pour tout entier naturel n , D^n en fonction de n .
 c) En déduire pour tout entier naturel n , l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a $A^n = PD^nP^{-1}$.

On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

On a : $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

alors après calculs on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 1 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 & 2^{n+1} - 2 \\ 1 - 2^n & 1 - 2^n & 3 \times 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

Fin Exercice

CORRECTION

Problème

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n , $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des endomorphismes de E . On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \text{id}_E$ et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E . On note $\chi_f(X) = \det(X \text{id}_E - f)$ le polynôme caractéristique de f et on rappelle que $\chi_f(f) = 0$ où 0 désigne l'application nulle de E .

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra introduire le polynôme caractéristique de M défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$. On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f .

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

i) $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante ?

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons qm. $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}$.

Soit $x \in E$.

$$x \in \mathcal{N}_k \Rightarrow x \in \text{Ker}(f^k)$$

$$\Rightarrow f^k(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(f^k(x)) = 0$$

$$\Rightarrow f^{k+1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \text{Ker}(f^{k+1})$$

$$\Rightarrow x \in \mathcal{W}_{k+1}.$$

$$\text{D'où } \mathcal{W}_k \subset \mathcal{W}_{k+1} \quad \square$$

ii) $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante ?

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons qm. $I_{k+1} \subset I_k$.

Soit $x \in E$.

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow x \in \text{Im}(f^{k+1})$$

$$\Rightarrow \exists t \in E, x = f^{k+1}(t)$$

$$\Rightarrow x = f^k(f(t))$$

$$\Rightarrow x \in \text{Im}(f^k)$$

$$\Rightarrow x \in I_k.$$

$$\text{D'où } I_{k+1} \subset I_k.$$



Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

$$\text{On a : } \forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}$$

$$\text{D'où : } (\forall k \in \mathbb{N}, \dim(\mathcal{N}_k) \leq \dim(\mathcal{N}_{k+1}))$$

$\Rightarrow$ la suite $(\dim(\mathcal{N}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers.

$$(\text{vu que : } \forall k \in \mathbb{N}, \dim(\mathcal{N}_k) \in \mathbb{N})$$



Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.

Il s'agit de justifier que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} / \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k+1}\}$ admet un plus petit élément.

Pour cela, il suffit de montrer que $\{k \in \mathbb{N} / \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k+1}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Rappel

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\{k \in \mathbb{N} / \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k+1}\} = \emptyset$.

Alors : $(\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_k \neq \mathcal{N}_{k+1})$.

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}, \dim(\mathcal{N}_k) < \dim(\mathcal{N}_{k+1}))$ (car $\dim(\mathcal{N}_k) \leq \dim(\mathcal{N}_{k+1})$)

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}, \dim(\mathcal{N}_{k+1}) - \dim(\mathcal{N}_k) \geq 1)$

Car $(\dim(\mathcal{N}_{k+1}) - \dim(\mathcal{N}_k)) \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n-1} (\dim(\mathcal{N}_{k+1}) - \dim(\mathcal{N}_k)) \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{N}_n) - \dim(\mathcal{N}_0) \geq n$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \dim(V_n) = +\infty$$

Ce qui est absurde car la suite $(\dim(V_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \dim(V_n) \leq \dim E)$$



Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.
4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.

On a $\mathcal{I}_{q+1} \subset \mathcal{I}_q$ d'après 1).

Alors pour montrer que $\mathcal{I}_{q+1} = \mathcal{I}_q$, il suffit de montrer que $\dim(\mathcal{I}_{q+1}) = \dim(\mathcal{I}_q)$.

D'après le théorème du rang appliqué à f^q on a :

$$\dim(\text{Ker } f^q) + \dim(\text{Im } f^q) = \dim E$$

$$\text{Càd : } \dim(\mathcal{N}_q) + \dim(\mathcal{I}_q) = \dim E.$$

$$\text{On a aussi : } \dim(\mathcal{N}_{q+1}) + \dim(\mathcal{I}_{q+1}) = \dim E.$$

$$\text{D'où } \dim(\mathcal{N}_q) + \dim(\mathcal{I}_q) = \dim(\mathcal{N}_{q+1}) + \dim(\mathcal{I}_{q+1})$$

$$\text{Or } \mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}, \text{ alors } \dim(\mathcal{I}_q) = \dim(\mathcal{I}_{q+1})$$

CQFD



Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.
4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.
5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,

On a $\dim \mathcal{N}_q + \dim \mathcal{I}_q = \dim(\text{Im } f^q) + \dim(\text{Ker } f^q) = \dim E$
d'après le théorème du rang.

Alors il reste à montrer que $\mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q = \{0\}$.

Soit alors $x \in \mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q$. Montrons que $x = 0$.

$$x \in \mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q \Rightarrow \begin{cases} f^q(x) = 0 \\ \exists t \in E, x = f^q(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{2q}(t) = 0$$

$$\Rightarrow t \in \text{Ker}(f^{2q}) = \mathcal{N}_{2q}.$$

Montrons d'autre part que : $(\forall k \geq q, \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_q)$

Faisons par récurrence sur $k \geq q$.

Initialisation : Pour $k = q$; c'est évident.

Hérédité :

Soit $k \geq q$. Supposons que $\mathcal{N}_k = \mathcal{N}_q$ et montrons que $\mathcal{N}_{k+1} = \mathcal{N}_q$.

On a $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_{k+1}$ car $(\mathcal{N}_k)_k$ croissante.

Montrons que $\mathcal{N}_{k+1} \subset \mathcal{N}_q$.

Soit $x \in N_{k+1}$. On a $f^{k+1}(x) = 0$.

$$\Rightarrow f(x) \in \ker(f^k) = N_k$$

$$\Rightarrow f(x) \in N_q \quad (\text{car } N_k = N_q \text{ à partir de } k \geq q)$$

$$\Rightarrow f^q(f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker(f^{q+1}) = N_{q+1}$$

$$\Rightarrow x \in N_q \quad (\text{car } N_q = N_{q+1})$$

On a ainsi : $(\forall k \geq q, N_k = N_q)$

$$\text{Donc } N_{2q} = N_q$$

$$\text{Or } z \in N_{2q}, \text{ alors } z \in N_q$$

$$\text{Et donc } \underbrace{f^q(z)}_{=0} = 0$$

Par suite $\boxed{x=0}$ CQFD

$$\text{Enfin : } \boxed{E = N_q \oplus I_q}$$



Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.
4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.
5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,
6. On considère pour tout entier naturel k , φ_k la restriction de f à $\mathcal{I}_k$.

a) Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap \mathcal{I}_k)$.

On a $f: E \rightarrow E$ et $\mathcal{I}_k \subset E$.

La restriction de f à $\mathcal{I}_k$ est :

$$\begin{aligned} \varphi_k: \mathcal{I}_k &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \varphi_k(x) = f(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi_k &\in \mathcal{L}(\mathcal{I}_k, E) \\ \forall x \in \mathcal{I}_k, \varphi_k(x) &= f(x) \end{aligned}$$

D'après le théorème du rang appliqué à φ_k , on a :

$$\dim(\text{Ker}(\varphi_k)) + \dim(\text{Im}(\varphi_k)) = \dim(\mathcal{I}_k)$$

$\hookrightarrow$ départ de φ_k

$$\text{On a } \text{Im}(\varphi_k) = \{ \varphi_k(x) / x \in \mathcal{I}_k \}$$

$$= \{ f(x) / x \in \text{Im}(f^k) \}$$

$$= \{ f(f^k(z)) / z \in E \}$$

$$= \{ f^{k+1}(z) / z \in E \}$$

$$= \text{Im}(f^{k+1})$$

$$\text{Im}(\psi_k) = \mathcal{I}_{k+1}$$

$$\begin{aligned} \ker(\psi_k) &= \{x \in \mathcal{I}_k / \psi_k(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{I}_k / f(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{I}_k / x \in \ker(f)\} \end{aligned}$$

$$\ker(\psi_k) = \ker(f) \cap \mathcal{I}_k$$

$$\dim(\ker(\psi_k)) + \dim(\text{Im}(\psi_k)) = \dim(\mathcal{I}_k) \text{ d'où il résulte donc ;}$$

$$\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim (\ker(f) \cap \mathcal{I}_k)$$



$$\begin{aligned} \psi_k \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_k, E) \\ \forall x \in \mathcal{I}_k, \psi_k(x) = f(x) \\ \dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim (\ker(f) \cap \mathcal{I}_k) \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.
4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.
5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,
6. On considère pour tout entier naturel k , φ_k la restriction de f à $\mathcal{I}_k$.
 - a) Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap \mathcal{I}_k)$.
 - b) En déduire que la suite $(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que :

$$(\dim(\mathcal{N}_{k+2}) - \dim(\mathcal{N}_{k+1})) - (\dim(\mathcal{N}_{k+1}) - \dim \mathcal{N}_k) \leq 0 ?$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } & (\dim(\mathcal{N}_{k+2}) - \dim(\mathcal{N}_{k+1})) - (\dim(\mathcal{N}_{k+1}) - \dim \mathcal{N}_k) = \\ & = \left(n - \dim(\mathcal{I}_{k+2}) - n + \dim(\mathcal{I}_{k+1}) \right) - \left(n - \dim(\mathcal{I}_{k+1}) - n + \dim \mathcal{I}_k \right) \quad \left(\begin{array}{c} \text{Théorème} \\ \text{du} \\ \text{rang} \end{array} \right) \\ & = \left(\dim(\mathcal{I}_{k+1}) - \dim(\mathcal{I}_{k+2}) \right) - \left(\dim \mathcal{I}_k - \dim(\mathcal{I}_{k+1}) \right) \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\hookrightarrow = \dim(\text{Ker } f \cap \mathcal{I}_{k+1})} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\hookrightarrow = \dim(\text{Ker } f \cap \mathcal{I}_k)} \end{aligned}$$

$$= \dim(\text{Ker } f \cap \mathcal{I}_{k+1}) - \dim(\text{Ker } f \cap \mathcal{I}_k) \leq 0$$

$$\text{Car } (\text{Ker } f \cap \mathcal{I}_{k+1}) \subset (\text{Ker } f \cap \mathcal{I}_k) \quad (\text{d'après 1°})$$

Fin Partie 1

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.

a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.

On a $u^r \in \mathcal{L}(E)$.

$v : \text{Im}(u^r) \rightarrow E$ est la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.
 $x \mapsto v(x) = u^s(x)$

$$\begin{aligned}\text{Im}(v) &= \{v(x) / x \in \text{Im}(u^r)\} \\ &= \{u^s(x) / x \in \text{Im}(u^r)\} \\ &= \{u^s(u^r(t)) / t \in E\} \\ &= \{u^{r+s}(t) / t \in E\} \\ &= \text{Im}(u^{r+s})\end{aligned}$$



Soit U une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.

a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.

b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.

On a $u^r \in \mathcal{L}(E)$.

$v : \text{Im}(u^r) \rightarrow E$ est la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.
 $x \mapsto v(x) = u^s(x)$

$$\begin{aligned}\text{Ker}(v) &= \{x \in \text{Im}(u^r) / v(x) = 0\} \\ &= \{x \in \text{Im}(u^r) / u^s(x) = 0\} \\ &= \{x \in \text{Im}(u^r) / x \in \text{Ker}(u^s)\} \\ &= \text{Im}(u^r) \cap \text{Ker}(u^s)\end{aligned}$$

$$\subset \text{Ker}(u^s)$$



Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.

a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.

b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.

c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.

On a $v \in \mathcal{L}(\text{Im}(u^r), E)$.

Appliquons à v le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Im}(u^r)) = \dim(\text{Ker}(v)) + \dim(\text{Im}(v))$$

$\hookrightarrow$ le départ de v .

$$1) b) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(v)) \leq \dim(\text{Ker}(u^s))$$

$$1) a) \Rightarrow \dim(\text{Im}(v)) = \dim(\text{Im}(u^{r+s}))$$

$$2) \text{ ou } \dim(\text{Im}(u^r)) \leq \dim(\text{Ker}(u^s)) + \dim(\text{Im}(u^{r+s}))$$

D'après le théorème du rang on a :

$$\begin{cases} \dim(\text{Im}(u^r)) = n - \dim(\text{Ker}(u^r)) \\ \dim(\text{Im}(u^{r+s})) = n - \dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \end{cases}$$

D'où :

$$n - \dim(\text{Ker}(u^r)) \leq \dim(\text{Ker}(u^s)) + n - \dim(\text{Ker}(u^{r+s}))$$

D'où :

$$\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.

- Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.
- Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.
- Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.
- En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.

Faisons par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $i = 0$.

$$\begin{aligned} \text{On } \dim(\text{Ker}(u^0)) &= \dim(\text{Ker}(\text{id}_E)) \\ &= \dim(\{0\}) \\ &= 0 \leq 0 \end{aligned}$$

Hérédité :

Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons que $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.

Montrons $\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq i+1$.

On a :

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker } u) \quad (\text{d'après 1)c})$$

Et on a $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$, par hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker } u) &= n - \text{rg}(u) \quad (\text{théorème du rang}) \\ &= n - (n-1) \quad (\text{rg}(u) = \text{rg}(U) = n-1) \end{aligned}$$

$$\dim(\text{Ker } u) = 1$$

$$\text{d'où } \dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq i+1$$

CQFD



Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.

a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.

b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.

c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.

d) En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.

2. On suppose de plus que $U^n = 0$.

a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.

Montrons par récurrence que :

$$\left(\forall 1 \leq i \leq n, \dim(\text{Ker}(u^i)) = i \right)$$

Initialisation : Pour $i = n$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \dim(\text{Ker}(u^n)) &= \dim(\text{Ker}(0)) \quad (u^n = 0 \text{ car } U^n = 0) \\ &= \dim(E) \quad (\text{Ker}(0) = E) \\ &= n \end{aligned}$$

Hérédité :

Soit $2 \leq i \leq n$.

Supposons que $\dim(\text{Ker}(u^{i-1})) = i-1$.

Montrons que $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.

On a déjà $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$, d'après 1) d).

Montrons alors que $\dim(\text{Ker}(u^i)) \geq i$.

$$\text{On a } \dim(\text{Ker}(u^i)) = \dim(\text{Ker}(u^{(i-1)+1}))$$

$$\leq \dim(\text{Ker}(u^{i-1})) + \dim(\text{Ker}(u))$$

d'après 1) c)

Et on a :

$\dim(\ker(U^i)) = i$, par hypothèse de récurrence.

$\dim(\ker(U)) = 1$ (car $\operatorname{rg}(U) = n-1$ et via le thm du rang)

$$\text{D'où } i \leq \dim(\ker(U^{i-1})) + 1$$

Ainsi : $\dim(\ker(U^{i-1})) \geq i-1$ CQFD



Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.

- Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.
- Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.
- Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.
- En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.

2. On suppose de plus que $U^n = 0$.

- Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.
- Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n .

Il s'agit de montrer que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$

On a $u^n = 0$ car $U^n = 0$.

et on a $\dim(\text{Ker}(u^{n-1})) = n-1$ (d'après 2)a)

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(u^{n-1})) \neq \dim E$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(u^{n-1}) \neq E$$

$$\Rightarrow u^{n-1} \neq 0$$



Rappel

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
 $\text{Ker}(f) = E \Leftrightarrow f = 0$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.
 - a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.
 - b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.
 - c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.
 - d) En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.
2. On suppose de plus que $U^n = 0$.
 - a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.
 - b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n .
 - c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E .

On a $u^{n-1} \neq 0$, alors : $(\exists e \in E, u^{n-1}(e) \neq 0)$.

Montrons que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ est une base de E .

On a $\text{Card}(\mathcal{B}_e) = \dim(E) (=n)$

Alors il suffit de montrer que $\mathcal{B}_e$ est libre.

Soient alors $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(e) = 0$.

Montrons que : $(\forall 0 \leq i \leq n-2, \lambda_i = 0)$.

On a : $\lambda_0 e + \lambda_1 u(e) + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(e) = 0$ (2)

Composons par u^{n-1} , on a :

$$\lambda_0 u^{n-1}(e) + \lambda_1 \underbrace{u^n(e)}_{=0} + \dots = 0$$

$$\hookrightarrow \forall i \geq n, u^i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 u^{n-1}(e) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 0, \text{ car } u^{n-1}(e) \neq 0$$

(2) devient : $\lambda_1 v(e) + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$

Composons par v^{n-2} . On obtient $\lambda_1 v^{n-1}(e) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ car $v^{n-1}(e) \neq 0$

De proche en proche, on annulera tous les autres λ_i .

B_e est enfin libre

CQFD



Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.

a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.

b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.

c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.

d) En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.

2. On suppose de plus que $U^n = 0$.

a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.

b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n .

c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E .

d) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_e}(u) = \begin{pmatrix} e & U(e) & \dots & U(U^{n-2}(e)) & U(U^{n-1}(e)) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.
 - a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.
 - b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.
 - c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.
 - d) En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.
2. On suppose de plus que $U^n = 0$.
 - a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.
 - b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n .
 - c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E .
 - d) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.
3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n - 1$ sont semblables.

Soient U et U' deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $(n-1)$.
 Montrons que U et U' sont semblables.

u étant l'endomorphisme canoniquement associé à U , et $\mathcal{B}_e$ la base ci-dessus.

$$\text{On a } \text{mat}_{\mathcal{B}_e}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc U et $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

En procédant de même pour la matrice U' . On aura aussi

que U' et $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

D'où L et L' sont semblables.



Fin Partie 2

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f .

Soit $1 \leq k \leq p$. Montrons que F_k est stable par f .

On a $(f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$ et f commutent.

D'où $\text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$ est stable par f .

Cad F_k est stable par f .



Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f .

2. Montrer que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

$$E = \text{ker}(0)$$

$$= \text{ker}(\chi_f(f)) \quad (\text{Cayley-Hamilton})$$

$$= \text{ker}((f - \lambda_1 \text{id}_E)^{m_1} \dots (f - \lambda_p \text{id}_E)^{m_p})$$

$$= \text{ker}(f - \lambda_1 \text{id}_E)^{m_1} \oplus \dots \oplus \text{ker}(f - \lambda_p \text{id}_E)^{m_p}, \text{ d'après le théorème de}$$

décomposition des noyaux, vu que les polynômes $(X - \lambda_1)^{m_1}, \dots, (X - \lambda_p)^{m_p}$ sont deux à deux premiers entre eux.

$$\text{Donc : } E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$



Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f .
2. Montrer que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.
3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.
 - a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .

Soit $1 \leq k \leq p$.

Soit $f_k \in \mathcal{L}(F_k)$ l'endomorphisme induit par f sur F_k (F_k étant stable par f).

On a $\varphi_k \in \mathcal{L}(F_k)$ et que $(\forall x \in F_k, \varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x)$

$$\Rightarrow \forall x \in F_k, \varphi_k(x) = \left(f_k - \lambda_k \text{id}_{F_k} \right) (x)$$

$$\Rightarrow \varphi_k = f_k - \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}) \Rightarrow \forall x \in F_k, (f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(f_k - \lambda_k \text{id}_{F_k} \right)^{m_k} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_k^{m_k} = 0$$

D'où φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k



Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f .
2. Montrer que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.
3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.
 - a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .
 - b) Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k .

Soit $1 \leq k \leq p$. On a $\varphi_k^{m_k} = 0$, c'est-à-dire $(f - \lambda_k \text{id}_{F_k})^{m_k} = 0$

D'où $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i} \mid (X - \lambda_k)^{m_k}$

Par suite λ_k est l'unique valeur propre de $f|_{F_k}$.

D'où $\chi_{f|_{F_k}}(X) = (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$, puisque $f|_{F_k} \in \mathcal{L}(F_k)$.

D'autre part, on sait que $\chi_{f|_{F_k}}(X) \mid \chi_f(X)$

D'où $(X - \lambda_k)^{\dim F_k} \mid \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$; m_i étant la multiplicité de λ_i .

Par suite $\dim(F_k) \leq m_k$.

Ainsi : $\forall 1 \leq k \leq p, \dim(F_k) \leq m_k$

Et que $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$, alors

$$\dim E = \sum_{k=1}^p \dim(F_k)$$

Et $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} \Rightarrow$

$$\dim(E) = \sum_{k=1}^p m_k$$

$$\text{Abs: } \sum_{k=1}^p m_k = \sum_{k=1}^p \dim(F_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^p (m_k - \dim(F_k)) = 0$$

$$\text{Or } (\forall 1 \leq k \leq p, m_k - \dim(F_k) \geq 0)$$

Donc

$$\forall 1 \leq k \leq p, \dim(F_k) = m_k$$



Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f .
2. Montrer que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.
3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.
 - a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .
 - b) Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k .
 - c) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k .

Soit $1 \leq k \leq p$. Montrons que l'indice de nilpotence de φ_k est m_k .

On a déjà que $\varphi_k^{m_k} = 0$.

Alors il reste à montrer que $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $\varphi_k^{m_k-2} = 0$.

Alors $(f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k-1} = 0$ sur F_k .

Et on a que $(\forall i \neq k, (f - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i} = 0 \text{ sur } F_i)$, par définition de F_i .

En plus, les $(f - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i}$ où $i \neq k$, et $(f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k-1}$ commutent tous deux à deux.

Alors leur composée $\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (f - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i} \right) \circ (f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k-1} = 0$

sur chaque F_i , pour tout $1 \leq i \leq p$.

Or $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, alors $\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (f - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i} \right) \circ (f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k-1} = 0$

sur E entier.

$\Rightarrow \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^p (x - \lambda_i)^{m_i} \right) \times (x - \lambda_h)^{m_h - 1}$ est un polynôme annulateur de f .

$$\text{Or } \chi_f(x) = \prod_{i=1}^p (x - \lambda_i)^{m_i}$$

Alors le polynôme $\frac{\chi_f(x)}{x - \lambda_h}$ est un polynôme annulateur de f .

Et celui-ci est unitaire et de degré $(n-1)$.

$$\Rightarrow \left(\exists a_0, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{C}, a_0 \text{id}_E + \dots + a_{n-2} f^{n-2} + f^{n-1} = 0 \right)$$

$\Rightarrow (\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille liée.

Ce qui est absurde, car elle est supposée libre.



Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f .
2. Montrer que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.
3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.
 - a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .
 - b) Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k .
 - c) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k .
4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tel que chaque bloc

est une matrice de $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ de la forme $A_k =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

On a $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Notons pour chaque $1 \leq k \leq p$, $f_k \in \mathcal{L}(F_k)$ l'endomorphisme induit par f sur F_k .

Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{B}_p$ une base adaptée à cette décomposition. On a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1), \dots, \text{mat}_{\mathcal{B}_p}(f_p)) ; \text{ matrice diagonale par blocs.}$$

ou que les F_k sont stables par f .

D'autre part, pour tout $1 \leq k \leq p$, on a : $\varphi_k = f_k - \lambda_k \text{id}_{F_k}$.

Càd : $f_k = \varphi_k + \lambda_k \text{id}_{F_k}$.

D'où $\text{mat}_{\mathcal{B}_k}(f_k) = \text{mat}_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k) + \text{mat}_{\mathcal{B}_k}(\lambda_k \text{id}_{F_k})$

$\underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}_k}(f_k)}_{\text{noté } A_k}$

$$\Rightarrow A_k = \underset{B_k}{\text{mat}}(\varphi_k) + \begin{pmatrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \varphi_k \in \mathcal{L}(F_k) \\ \dim(F_k) = m_k \\ \varphi_k^{m_k} = 0 \text{ et } \varphi_k^{m_k-1} \neq 0 \end{cases}$$

Soit $e \in F_k$ tel que $\varphi_k^{m_k-1}(e) \neq 0$.

La famille $(e, \varphi_k(e), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e))$ est une base de F_k .

Notons $B_k = (e, \varphi_k(e), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e))$ cette base.

$$\text{On a } \underset{B_k}{\text{mat}}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}, \text{ pour tout } 1 \leq k \leq p$$

$$\underset{B}{\text{mat}}(f) = \text{diag} \left(\underset{B_1}{\text{mat}}(f_1), \dots, \underset{B_p}{\text{mat}}(f_p) \right)$$

Fin Partie 3

Partie 4: Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un p -cycle de f .

1. Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un p -cycle de f .

a) Montrer que $f^p = \text{id}_E$.

Il suffit de montrer que f^p et id_E coïncident en tous les vecteurs de la famille génératrice $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$.

Soit alors $0 \leq k \leq p-1$. On a :

$$\begin{aligned} f^p(f^k(x_0)) &= f^k(f^p(x_0)) \\ &= f^k(x_0) \quad (\text{car } f^p(x_0) = x_0) \\ &= \text{id}_E(f^k(x_0)) \end{aligned}$$

D'où

$$f^p = \text{id}_E$$



Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un p -cycle de f .

1. Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un p -cycle de f .

a) Montrer que $f^p = \text{id}_E$.

b) Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$ admet un maximum noté γ .

F_{x_0} est une partie de $\mathbb{N}$.

Pour montrer qu'elle admet un maximum, c'est un plus grand élément, il reste à montrer que $F_{x_0} \neq \emptyset$ et F_{x_0} majorée.

i) $F_{x_0} \neq \emptyset$?

On a $1 \in F_{x_0}$, car la famille (x_0) est libre, puisque $x_0 \neq 0$.

$x_0 \neq 0$, car sinon, on aurait $x_0 = 0$ et par suite $E = \{0\}$ ou la famille génératrice nulle ; absurde car $E \neq \{0\}$.

ii) F_{x_0} est majorée ?

Soit $k \in F_{x_0}$.

On a $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ est libre de E .

$$\Rightarrow \text{card}(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \leq \dim(E)$$

$$\Rightarrow k \leq n.$$

$$\text{Ainsi : } (\forall k \in F_{x_0}, k \leq n)$$

D'où F_{x_0} est majorée.



Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un p -cycle de f .

1. Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un p -cycle de f .

a) Montrer que $f^p = \text{id}_E$.

b) Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$ admet un maximum noté γ .

c) i) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.

On a $\gamma = \max(F_{x_0}) = \max(\{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est libre}\})$

Alors : $\begin{cases} (x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)) \text{ est libre} \\ \forall s \geq \gamma, (x_0, f(x_0), \dots, f^{s-1}(x_0)) \text{ est liée} \end{cases} \quad (R)$

Montrons maintenant par récurrence que :

$$\forall k \geq \gamma, f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

Initialisation : Pour $k = \gamma$.

Montrons que $f^\gamma(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.

On a $\gamma+1 \geq \gamma$ alors $(x_0, f(x_0), \dots, f^\gamma(x_0))$ est liée, d'après (R)

$\Rightarrow \exists d_0, \dots, d_\gamma \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tels que :

$$d_0 x_0 + \dots + d_{\gamma-1} f^{\gamma-1}(x_0) + d_\gamma f^\gamma(x_0) = 0$$

On a $d_\gamma \neq 0$, car sinon, on aurait $d_0 x_0 + \dots + d_{\gamma-1} f^{\gamma-1}(x_0) = 0$

Du coup : $d_0 = \dots = d_{\gamma-1} = 0$, car $(x_0, \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre.

Par suite, on aurait que $d_0 = \dots = d_\gamma = 0$; absurde car ils ne sont pas tous nuls.

Alors $d_\gamma \neq 0$ et $d_0 x_0 + \dots + d_{\gamma-1} f^{\gamma-1}(x_0) + d_\gamma f^\gamma(x_0) = 0$.

$$\Rightarrow f^\gamma(x_0) = \sum_{k=0}^{\gamma-1} \frac{-d_k}{d_\gamma} \cdot f^k(x_0)$$

Par suite, $f^\gamma(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$

Hérédité :

Soit $k \geq \gamma$. Supposons que $f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.

Et montrons que $f^{k+1}(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.

On a $f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$

$$\Rightarrow f^k(x_0) = d_0 x_0 + \dots + d_{\gamma-2} f^{\gamma-2}(x_0) + d_{\gamma-1} f^{\gamma-1}(x_0)$$

$$\Rightarrow f^{k+1}(x_0) = d_0 f(x_0) + \dots + d_{\gamma-2} f^{\gamma-1}(x_0) + d_{\gamma-1} f^\gamma(x_0)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))}$

$\in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$
montré ci-dessus

d'où $f^{k+1}(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$

□

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un p -cycle de f .

1. Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un p -cycle de f .

- Montrer que $f^p = \text{id}_E$.
- Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$ admet un maximum noté γ .
- Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
 - Montrer que $\gamma = n$.

$$\text{On a : } \forall k \geq \gamma, f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

$$\Rightarrow \forall 0 \leq k \leq p-1, f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

Et puisque $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E .

$$\text{Alors } \forall x \in E, x \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

Par suite $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E .

Or $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre.

Alors $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est une base de E .

D'où $\dim E = \gamma$ (son cardinal).

Cad

$$\gamma = n$$



Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un p -cycle de f .

1. Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un p -cycle de f .

- Montrer que $f^p = \text{id}_E$.
- Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$ admet un maximum noté γ .
- Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
 - Montrer que $\gamma = n$.
 - Déterminer le nombre des valeurs propres distinctes de f .

On a $f^p = \text{id}_E$ alors $(X^p - 1)$ est un polynôme annulateur de f .
 D'où $\pi_f(x) \mid (X^p - 1)$.

Les valeurs propres de f sont exactement les racines de $\pi_f(x)$.

Or $(X^p - 1)$ est scindé dans $\mathbb{C}$ et a racines simples.

Alors $\pi_f(x)$ est aussi scindé dans $\mathbb{C}$ et a racines simples.

De plus, le nombre des valeurs propres de f est égal au nombre des racines de $\pi_f(x)$, qui est $\deg(\pi_f(x))$.

Notons $d = \deg(\pi_f(x))$

On a d'abord $d \leq n$, car $\pi_f(x) \mid \chi_f(x)$ et $\deg(\chi_f(x)) = n$.

Montrons que $d = n$:

Supposons que $d \leq n - 1$.

On a $\pi_f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{d-1} x^{d-1} + x^d$, où $a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{C}$.

$$\text{et } \pi_f(f) = 0 \Rightarrow a_0 \text{id}_E + a_1 f + \dots + a_{d-1} f^{d-1} + f^d = 0$$

D'où $(id_E, f, \dots, f^d)$ est une famille liée.

Et on a $d \leq n-1$, alors $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est liée

Or $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre, car $\gamma = n$.

D'où $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est aussi libre.

Ce qui est absurde.

Enfin $d=n$, est le nombre de valeurs propres de f
(distinctes deux à deux.)



2. Soit $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un n -cycle de f .

a) Justifier que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E .

On a $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E .

Et $\text{Card}(\mathcal{B}_{x_0}) = \dim(E)$.

D'où $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E .



2. Soit $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un n -cycle de f .

a) Justifier que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E .

b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_{x_0}$.

$$\begin{array}{c} \text{mat}(f)_{\mathcal{B}_{x_0}} = \begin{array}{c} x_0 \\ f(x_0) \\ \vdots \\ f^{n-2}(x_0) \\ f^{n-1}(x_0) \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix} = G$$

$$f^n(x_0) = x_0$$

2. Soit $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un n -cycle de f .

a) Justifier que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E .

b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base B_{x_0} .

c) On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{-k} \\ \overline{\omega}^{-2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{-nk} \end{pmatrix}$, où $\overline{\omega}$ désigne le conjugué de ω .

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, vérifier que U_k est un vecteur propre de G associé à une valeur propre α_k à déterminer.

Sei $1 \leq k \leq n$.

Déterminons $d_k \in \mathbb{C}$ tel que $G \sqcup_k = d_k \sqcup_k$.

$$W = e^{i \frac{2\pi}{n}}$$

$$w^n = 1$$

$$\bar{w} = w^{-1}$$

$$GU_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ \bigcirc & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega^{nk} \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} \quad \omega^k = \omega^{-k} = \omega^{-2k}$$

$$= \omega^{-k} \begin{pmatrix} \omega^{nk+k} \\ \omega^{2k} \\ 1 \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k+k} \end{pmatrix}$$

$$W = e^{i \frac{2\pi}{n}}$$

$$W^n = 1$$

$$\bar{w} = w^{-1}$$

$$\overline{w}^n = 1$$

$$G U_k = \overline{\omega}^{-k} \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^k \end{pmatrix} \quad \text{" } \overline{\omega}^n = 1 \text{ "}$$

$$U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$$

D'où $G U_k = \alpha_k U_k$; où $\alpha_k = \overline{\omega}^{-k}$

$$\alpha_k = \overline{\omega}^{-k}$$

$$\alpha_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

$$\left(\text{car } \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} ; \overline{\omega} = e^{-\frac{2\pi i}{n}} \right)$$

Puisque $U_k \neq 0$ alors U_k est un vecteur propre de G associé à la valeur propre $\alpha_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$.



3. Soit $M = (m_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \bar{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

a) Calculer $M \overline{M}$.

Soient $l, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$(M \overline{M})_{lj} = \sum_{k=1}^n M_{lk} \cdot \overline{M}_{kj} \quad \left(M_{lk} = m_{lk} = \bar{\omega}^{lk}, \overline{M}_{kj} = \overline{m}_{kj} = \omega^{kj} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \bar{\omega}^{lk} \omega^{kj} \quad \left(\text{on a } \bar{\omega} = \frac{1}{\omega} = \omega^{-1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \omega^{-lk} \omega^{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^n \omega^{kj-lk}$$

$$(M \overline{M})_{lj} = \sum_{k=1}^n \left(\omega^{j-l} \right)^k$$

Cas 1 : si $j=l$

$$(M \overline{M})_{lj} = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

Cas 2 : si $j \neq l$

$$(M \overline{M})_{lj} = \sum_{k=1}^n \left(\omega^{j-l} \right)^k$$

$$\omega^{j-l} \neq 1; \text{ on effct :}$$

$$\text{On a } \begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ -n \leq -l \leq -1 \end{cases} \Rightarrow -n+1 \leq j-l \leq n-1$$

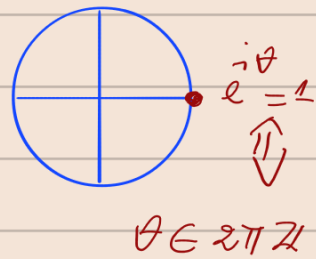
$$\Rightarrow -(n-1) \leq j-l \leq n-1$$

$$w^{j-l} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{2\pi(j-l)i}{n}} = 1 \quad \text{car } w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi(j-l)}{n} \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow j-l \in n\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (j-l) \text{ est un multiple de } n$$



$$\text{Or } -(n-1) \leq j-l \leq n-1 \text{ et } j-l \neq 0$$

D'où $(j-l)$ n'est pas un multiple de n

Par suite $w^{j-l} \neq 1$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} (M\overline{M})_{jl} &= \sum_{k=1}^n (w^{j-l})^k \\ &= w^{j-l} \cdot \frac{1 - (w^{j-l})^n}{1 - w^{j-l}} \quad \left(\text{car } w^{j-l} \neq 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } (w^{j-l})^n = (w^n)^{j-l} = 1, \text{ car } w^n = 1$$

$$\text{Par suite } (M\overline{M})_{jl} = 0.$$

Enfin :

$$(M\overline{M})_{jl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \\ n & \text{si } j = l \end{cases}$$

D'où

$$M\overline{M} = nI_n$$



3. Soit $M = (m_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

a) Calculer $M \overline{M}$.

b) En déduire que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1}

$$On a \quad M \overline{M} = n I_n$$

$$\Rightarrow M \cdot \left(\frac{1}{n} \overline{M} \right) = I_n$$

D'où

M est inversible (càd $M \in GL_n(\mathbb{C})$)

$$\text{et que } M^{-1} = \frac{1}{n} \overline{M}$$



4. Soit $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$

a) Montrer que H est diagonalisable.

$$H = \begin{pmatrix} b_0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & b_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ b_1 & & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & b_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & b_2 & & & \end{pmatrix} + \dots +$$

$$\begin{pmatrix} & & & b_{n-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ b_{n-1} & & & & & \end{pmatrix}$$

$$H = b_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=I_n} + b_1 \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ 1 & & & & \end{pmatrix}}_{=G} + b_2 \underbrace{\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & 1 & & & \end{pmatrix}}_{=G^2} + \dots +$$

$$b_{n-1} \underbrace{\begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}}_{=G^{n-1}}$$

$$H = b_0 I_n + b_1 G + \dots + b_{n-2} G^{n-2} + b_{n-1} G^{n-1}$$

$$H = \sum_{k=0}^{n-1} b_k G^k$$

D'autre part, on a : $(\forall 1 \leq k \leq n, G U_k = d_k U_k)$; G possédant ainsi n valeurs propres distinctes, qui sont les $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$; les racines n ème de l'unité.

D'où $\left\{ \begin{array}{l} G \text{ est diagonalisable.} \\ d_1, \dots, d_n \text{ ses valeurs propres distinctes 2 à 2} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists P \in GL_n(\mathbb{C}), G = P D P^{-1} \\ \text{où } D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \end{array} \right.$$

$$H = \sum_{k=0}^{n-1} b_k G^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} b_k P D^k P^{-1}$$

$$H = P \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k D^k \right) \cdot P^{-1}$$

$\searrow$ est une matrice diagonale

D'où H est diagonalisable



4. Soit $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$

a) Montrer que H est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de H et une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H .

On a : $H = P \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k D^k \right) \cdot P^{-1}$; où $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$

$H = P \cdot Q(D) \cdot P^{-1}$, où $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$

$Q(D) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k D^k$; $D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} b_k \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \text{diag}(b_k d_1^k, \dots, b_k d_n^k)$

$= \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} b_k d_n^k \right)$

$\begin{cases} Q(D) = \text{diag}(Q(d_1), \dots, Q(d_n)) \\ H = P \cdot Q(D) \cdot P^{-1} \end{cases}$

D'où les valeurs propres de H sont $Q(d_1), \dots, Q(d_n)$

où $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$

Pour une base de vecteurs propres :

$$\text{On a : } (\forall 1 \leq k \leq n, G U_k = \alpha_k U_k)$$

$$\Rightarrow \left(\forall 1 \leq k \leq n, \underbrace{Q(G)}_{L^{-1}H} \cdot U_k = Q(\alpha_k) \cdot U_k \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall 1 \leq k \leq n, H \cdot U_k = Q(\alpha_k) \cdot U_k \right)$$

$(U_1, \dots, U_n)$ est une base de vecteurs propres de H

Donc

$$\text{on } U_k = \begin{pmatrix} \overline{w}^k \\ \vdots \\ \overline{w}^{nk} \end{pmatrix} ; w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

Fin Partie 4

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$.

Soit $A = (A_{ij}) \in \mathcal{T}$, on a :

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij} E_{ij}$$

$(E_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{T}$, et est à $\frac{n^2 - n}{2}$ éléments.

Ainsi :

$$\dim(\mathcal{T}) = \frac{n^2 - n}{2}$$



On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$.
2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à $\mathcal{T}$.

Soit A une matrice nilpotente.

$$\text{On a } \chi_A(x) = x^n.$$

A est trigonalisable d'unique valeur propre 0.

A est semblable à une matrice triangulaire supérieure Δ .

Δ ne contient dans sa diagonale que 0.

Alors $\Delta \in \mathcal{T}$.



On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$.
2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à $\mathcal{T}$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.

$$i) \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{T}) ?$$

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$$

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\dim(\mathcal{T}) = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$\text{Donc } \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{T})$$

$$ii) \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T} = \{0\} ?$$

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}$. M. que $A = 0$

$$A \in \mathcal{T} \Rightarrow \begin{cases} \forall i \in [1, n], A_{ii} = 0 \\ \forall i > j, A_{ij} = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall i, j \in [1, n], A_{ij} = A_{ji}$$

$$\Rightarrow \forall i < j, A_{ij} = A_{ji}$$

$$= 0 \quad (\text{car } j > i)$$

$$\text{Ainsi : } (\forall i, j \in [1, n], A_{ij} = 0)$$

$$\text{Donc } A = 0$$

i) et ii) impliquent que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$$



On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$.
2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à $\mathcal{T}$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ telle que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.

$$\text{On a } \begin{cases} F \text{ s.v. de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ F \subset \mathcal{N} \\ \dim(F) > \frac{n(n-1)}{2} \end{cases} \quad . \quad \text{Montrer que } \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) = 0$.
Alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F = \{0\}$.

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F) = \underbrace{\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))}_{> \frac{n^2-n}{2}} + \underbrace{\dim(F)}_{> \frac{n^2+n}{2}}$$

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F) > \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^2+n}{2} = n^2$$

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F) > \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$$

Ce qui est absurde car $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F)$ est un s.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi :

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$$



On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$. $= \frac{n(n-1)}{2}$
2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à $\mathcal{T}$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ telle que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.
5. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$.

Soit $\begin{cases} F \text{ s.v. de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ F \subset \mathcal{N} \end{cases}$. Montrons que $\dim(F) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$.

Alors d'après 4), $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F \neq \{0\}$$

Soit alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F$.

On a $A \in F$ et $F \subset \mathcal{N}$, alors A est nilpotente.

Et on a $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable.

$$\Rightarrow (\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \exists D \text{ diagonale}, A = P D P^{-1})$$

Or A nilpotente, alors $S_p(A) = \{0\}$.

$$\Rightarrow D = 0.$$

$$\text{D'où } A = 0.$$

Ainsi on a : $(\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F, A = 0)$

Cad : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F = \{0\}$, ce qui est absurde.

On a ainsi montré que si F est un sev de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{V}$, alors $\dim(F) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Mais on a que T est un sev de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{V}$ et vérifie $\dim(T) = \frac{n(n-1)}{2}$ (d'après 1°).

D'enfin :

La dimension maximale d'un sev de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{V}$ est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Fin Partie 5

- FIN DE L'ÉPREUVE -