

Deuxième problème

I. Etude d'une symétrie

11) a) Soient $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{C}^8$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$. Soit $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{C}^2$.

$$\sigma(\lambda A + \lambda' A') = \begin{bmatrix} \lambda d + \lambda' d' & -(\lambda b + \lambda' b') \\ -(\lambda c + \lambda' c') & \lambda a + \lambda' a' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} + \lambda' \begin{bmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{bmatrix} = \lambda \sigma(A) + \lambda' \sigma(A').$$

Donc

$$\sigma \in L(M_2(\mathbb{C})).$$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\sigma(\sigma(A)) = \sigma\left(\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

Donc $\sigma^2 = \text{Id}_{M_2(\mathbb{C})}$. Ainsi, σ est une involution linéaire de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ et donc

$$\sigma \text{ est une symétrie du } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel } M_2(\mathbb{C}).$$

b) On a déjà $\text{card}((I, J, K, L)) = 4 = \dim(M_2(\mathbb{C})) < +\infty$. Pour montrer que la famille (I, J, K, L) est une base de $M_2(\mathbb{C})$, il suffit de montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned} aI + bJ + cK + dL = 0 &\Rightarrow a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} a - id & -b + ic \\ b + ic & a + id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + id = 0 \\ a - id = 0 \\ b + ic = 0 \\ -b + ic = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (a + id) + (a - id) = 0 \\ (a + id) - (a - id) = 0 \\ (b + ic) + (-b + ic) = 0 \\ (b + ic) - (-b + ic) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 2id = 0 \\ 2ic = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow a = b = c = d = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille (I, J, K, L) est libre et donc

$$\text{la famille } (I, J, K, L) \text{ est une base de } M_2(\mathbb{C}).$$

Ensuite $\sigma(I) = I$, $\sigma(J) = -J$, $\sigma(K) = -K$ et $\sigma(L) = -L$. Donc

$$\text{Mat}_{(I, J, K, L)}(\sigma) = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

12) a) Soient $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{C}^8$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \sigma(B)\sigma(A) &= \begin{bmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dd' + cb' & -bd' - ab' \\ -dc' - ca' & bc' + aa' \end{bmatrix} \\ &= \sigma\left(\begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}\right) = \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) \\ &= \sigma(AB) \end{aligned}$$

$$\forall (A, B) \in (M_2(\mathbb{C}))^2, \sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A).$$

b) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ et $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$A\sigma(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = (ad - bc)I = \det(A)I.$$

$$\forall A \in M_2(\mathbb{C}), A\sigma(A) = \det(A)I.$$

c) Si A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$ et donc, d'après la question b),

$$\left(\frac{1}{\det(A)}A\right) \cdot \sigma(A) = I.$$

On en déduit que $\sigma(A)$ est inversible à gauche et donc inversible. De plus, $(\sigma(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A$.

Ensuite, d'après a),

$$\sigma(A^{-1})\sigma(A) = \sigma(AA^{-1}) = \sigma(I) = I.$$

On en déduit que $\sigma(A^{-1}) = (\sigma(A))^{-1}$. Finalement,

$$\forall A \in GL_2(\mathbb{C}), \sigma(A) \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ et } (\sigma(A))^{-1} = \sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}A.$$

13) a) Soient $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{C}^8$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ et soit $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{C}^2$.

$$\tau(\lambda A + \lambda' A') = (\lambda a + \lambda' a') + (\lambda d + \lambda' d') = \lambda(a + d) + \lambda'(a' + d') = \lambda\tau(A) + \lambda'\tau(A').$$

Donc

$$\tau \text{ est une forme linéaire sur } M_2(\mathbb{C}).$$

b) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$A + \sigma(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{bmatrix} = (a + d)I = \tau(A)I.$$

Ainsi,

$$\forall A \in M_2(\mathbb{C}), \sigma(A) = -A + \tau(A)I.$$

II. Une $\mathbb{R}$ -algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

14) a) • **Existence.** Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Posons $z_1 = \alpha - i\delta$ et $z_2 = \beta + i\gamma$ où α, β, γ et δ sont quatre réels.

$$\begin{aligned} M(z_1, z_2) &= \begin{bmatrix} \alpha - i\delta & -\beta + i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha + i\delta \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ &= \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L. \end{aligned}$$

Donc tout élément de H est une combinaison linéaire de I, J, K et L .

• **Unicité.** D'après la question 12)b), la famille (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$. En particulier, si $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma'$ et δ' sont 8 réels tels que $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L = \alpha' I + \beta' J + \gamma' K + \delta' L$ alors $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$ et $\delta = \delta'$ ce qui démontre l'unicité d'une décomposition.

tout matrice de H s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ où α, β, γ et δ sont des réels.

b) Il reste à constater que $I = M(1, 0), J = M(0, 1), K = M(0, i)$ et $L = M(-i, 0)$ sont quatre éléments de H . Ainsi, la famille (I, J, K, L) est une famille d'éléments de H telle que tout élément de H est combinaison linéaire (à coefficients réels) des éléments de cette famille. Donc

la famille (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H et $\dim_{\mathbb{R}}(H) = 4$.

c) Soit $(z_1, z_2, z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned} M(z_1, z_2) \times M(z'_1, z'_2) &= \begin{bmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z'_1 & -\overline{z'_2} \\ z'_2 & \overline{z'_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2 & -z_1 \overline{z'_2} - \overline{z_2} \overline{z'_1} \\ z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2 & -z_2 \overline{z'_2} + \overline{z_1} \overline{z'_1} \end{bmatrix} \\ &= M(z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2, z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2) \in H. \end{aligned}$$

Donc

H est stable pour le produit matriciel.

d) On suppose acquis le fait que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre (de dimension 8).

D'après la question 14)b), $H = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(I, J, K, L)$. Par suite, H est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et H est non vide et stable pour $+$ et $\cdot$. Ensuite, H est stable pour le produit matriciel d'après la question 14)c). Enfin, H contient l'élément neutre de $M_2(\mathbb{C})$ pour $\times$.

Donc H est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$ -algèbre $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot, \times)$ et en particulier,

H est une $\mathbb{R}$ -algèbre.

$JK = M(0, 1)M(0, i) = M(-i, 0) = L$ et $KJ = M(0, i)M(0, 1) = M(i, 0) = -L$. Donc j et k sont deux éléments de H tels que $JK \neq KJ$ et H n'est pas une algèbre commutative.

15) a) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ puis $A = M(z_1, z_2)$.

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \\ -z_2 & z_1 \end{bmatrix} = M(\overline{z_1}, -z_2) \in H.$$

D'autre part,

$$\det(A) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

$\forall A \in H, \sigma(A) \in H$ et $\det(A) \in \mathbb{R}^+.$

b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ puis $A = M(z_1, z_2)$.

$$A \notin GL_2(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Ainsi, toute matrice non nulle de H est inversible pour $\times$ dans $M_2(\mathbb{C})$. On sait alors que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \sigma(A)$. Or, d'après la question a), $\sigma(A) \in H$ et donc $\frac{1}{\det(A)} \sigma(A) \in H$. Ainsi,

toute matrice non nulle de H est inversible et son inverse est dans H .

c) • $H \setminus \{0\}$ est non vide car contient I et $H \subset GL_2(\mathbb{C})$ d'après la question précédente.

- On sait déjà que $\times$ est une loi interne dans H . Plus précisément, puisque tout élément non nul de H est une matrice inversible, le produit de deux matrices non nulles de H est inversible et en particulier non nul ou encore $H \setminus \{0\}$ est stable pour $\times$.

- D'après la question b), tout élément de $H \setminus \{0\}$ possède un inverse pour $\times$ dans $H \setminus \{0\}$.

Finalement $H \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{C}), \times)$ et en particulier

$(H \setminus \{0\}, \times) \text{ est un groupe.}$

16) Soit $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{Z}^8$ puis $A = M(a - id, b + ic) = aI + bJ + cK + dL$ et $A' = M(a' - id', b' + ic') = a'I + b'J + c'K + d'L$. On a déjà

$$\det(A) = |a - id|^2 + |b + ic|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ et } \det(A') = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2.$$

D'autre part, d'après la question 14)c)

$$\begin{aligned} AA' &= M(a - id, b + ic)M(a' - id', b' + ic') \\ &= M((a - id)(a' - id') - (b + ic)(b' + ic'), (b + ic)(a' - id') + (a + id)(b' + ic')) \\ &= M((aa' - bb' - cc' - dd') - i(ad' + bc' - cb' + da'), (ab' + ba' + cd' - dc') + i(ac' - bd' + ca' + db')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) &= \det(A)\det(A') = \det(AA') \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc')^2 + (ac' - bd' + ca' + db')^2 + (ad' + bc' - cb' + da')^2. \end{aligned}$$

Comme les quatre réels $aa' - bb' - cc' - dd'$, $ab' + ba' + cd' - dc'$, $ac' - bd' + ca' + db'$ et $ad' + bc' - cb' + da'$ sont des entiers relatifs, on a montré que tout produit de deux somme de quatre carrés d'entiers est encore une somme de quatre carrés d'entiers.

III. Un produit scalaire et une projection orthogonale

17) a) Soit $(A, B) \in H^2$. D'après la question 15)a), $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont dans H . Puisque H est une $\mathbb{R}$ -algèbre, il en est de même de $A\sigma(B) + B\sigma(A)$. Par suite, il existe deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $A\sigma(B) + B\sigma(A) = M(z_1, z_2)$. On a alors

$$(A|B) = \frac{1}{4}(z_1 + \overline{z_1}) = \frac{1}{2}\text{Re}(z_1) \in \mathbb{R}.$$

$\forall (A, B) \in H^2, (A|B) \in \mathbb{R}.$

b) Soit $A \in H$. D'après la question 12)b) et puisque τ est linéaire,

$$(A|A) = \frac{1}{4}(A\sigma(A) + \sigma(A)A) = \frac{1}{4}\tau(2\det(A)I) = \frac{1}{4}2\det(A).\tau(I) = \det(A).$$

$\forall A \in H, (A|A) = \det(A).$

c) • D'après la question a), $(\cdot|\cdot)$ est une application de H^2 dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(A, B) \in H^2$.

$$(B|A) = \frac{1}{4}(B\sigma(A) + A\sigma(B)) = \frac{1}{4}(A\sigma(B) + B\sigma(A)) = (A|B).$$

Donc $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.

- τ et σ sont linéaires. On en déduit que $(\cdot|\cdot)$ est linéaire par rapport à sa première variable et donc par symétrie, $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire.

- Soit $A \in H$. D'après les questions 17)b) et 15)a), $(A|A) = \det(A) \in \mathbb{R}^+$. Donc $(.|.)$ est positive.
- Soit $A \in H$ telle que $(A|A) = 0$. Alors, $\det(A) = 0$ et A est un élément non inversible de H . D'après la question 15)b), on a nécessairement $A = 0$. Donc $(.|.)$ est définie.

En résumé, $(.|.)$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H et donc

$(.|.)$ est un produit scalaire sur H .

18) Déjà, $\det(I) = \det(J) = \det(K) = \det(L) = 1$ et donc

$$\|I\| = \|J\| = \|K\| = \|L\| = 1.$$

Ensuite, on note que $\sigma(J) = -J$, $\sigma(K) = -K$ et $\sigma(L) = -L$ puis que $JK = -KJ = L$, $KL = -LK = J$ et $LJ = -JL = K$. Puisque τ est linéaire, on a

$$(I|J) = \frac{1}{4}\tau(-J + J) = \frac{1}{4}\tau(0) = 0 \text{ et de même } (I|K) = (I|L) = 0$$

et aussi

$$(J|K) = \frac{1}{4}\tau(-JK - KJ) = \frac{1}{4}\tau(0) = 0 \text{ et de même } (J|L) = (K|L) = 0.$$

Finalement, puisque (I, J, K, L) est déjà une base de H ,

(I, J, K, L) est une base orthonormée de $(H, (.|.))$.

19) a) τ est une forme linéaire non nulle (car par exemple $\tau(I) = 2 \neq 0$) sur H et F est le noyau de cette forme linéaire non nulle. Donc

F est un hyperplan de H .

On en déduit que $\dim(F) = 4 - 1 = 3$. On note alors que, puisque $\tau(J) = \tau(K) = \tau(L) = 0$, J , K et L sont trois éléments de F . Ainsi, la famille (J, K, L) est une famille libre de F vérifiant de plus $\text{card}(J, K, L) = 3 = \dim(F) < +\infty$. Donc

une base (orthonormée) de F est (J, K, L) .

b) Puisque F est un hyperplan de H , $F^\perp$ est une droite vectorielle. Puisque (I, J, K, L) est une base orthonormée de H , I est une matrice non nulle orthogonale à J , K , L et donc à F . On en déduit que la famille (I) est une base de $F^\perp$ et en particulier que

$$F^\perp = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

c) Soit $A \in H$. Posons $A = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ où α , β , γ et δ sont quatre réels. Alors

$$\frac{1}{2}(A - \sigma(A)) = \frac{1}{2}((\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L) - (\alpha I - \beta J - \gamma K - \delta L)) = \beta J + \gamma K + \delta L.$$

Donc $\frac{1}{2}(A - \sigma(A)) \in F$ et d'autre part $A - \frac{1}{2}(A - \sigma(A)) = \alpha I \in F^\perp$. On a montré que

$$\forall A \in H, \pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A)).$$

FIN

