

Intégr - généralisée

Q1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$$

Séries numériques

Q1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

2) Intégrabilité des fonctions de référence

Proposition 1 : (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) i) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

ii) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

Intégr - généralisée

Q1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$$

Rép: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} dx$ CV

Riemann

$$d = \frac{3}{2} > 1$$

Séries numériques

Q1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Idem (OK)

Intégr - généralisée

Q1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Rép :

Séries numériques

Q1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2) Intégrabilité des fonctions de référence

Proposition 1 : (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) i) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

ii) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

Intégr-généralisée

Q1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Rép: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx$ DIV

Riemann

$$\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$$

Séries numériques

Q1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Rép: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ DIV

Riemann
 $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$

Intégr-généralisée

Q1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

Séries numériques

Q1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

2) Intégrabilité des fonctions de référence

Proposition 1 : (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) i) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

ii) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

Intégr-généralisée

Q1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

Rép: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ DIV } Riemann
 $\alpha = 1 \leq 1$

Séries numériques

Q1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

Rép: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ DIV } Riemann
 $\alpha = 1 < 1$

Intégral généralisée

Q.) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x\sqrt{x}} dx$$

Rép :

Séries numériques

Q.) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}$$

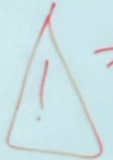
Rép :

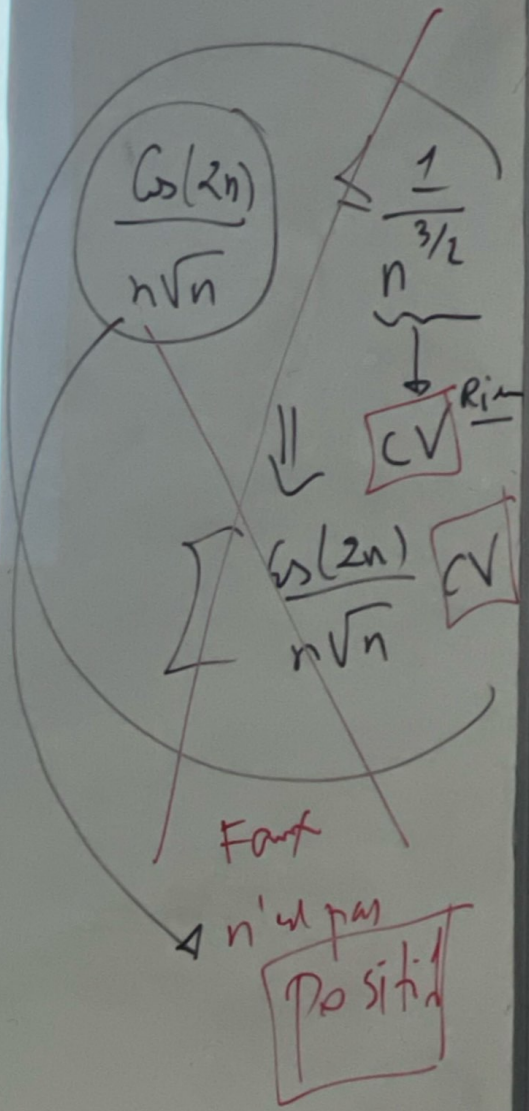
Séries numériques

Q.) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \quad ?$$

Réponse :

Erreur à éviter  \Rightarrow



can : $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

Intégr-généralisée

Q.) Quelle est la nature de :
 $\int_{-1}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\pi\sqrt{x}} dx$?

Réponse :

Séries numériques

Q.) Quelle est la nature de :
 $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}$?

Réponse :

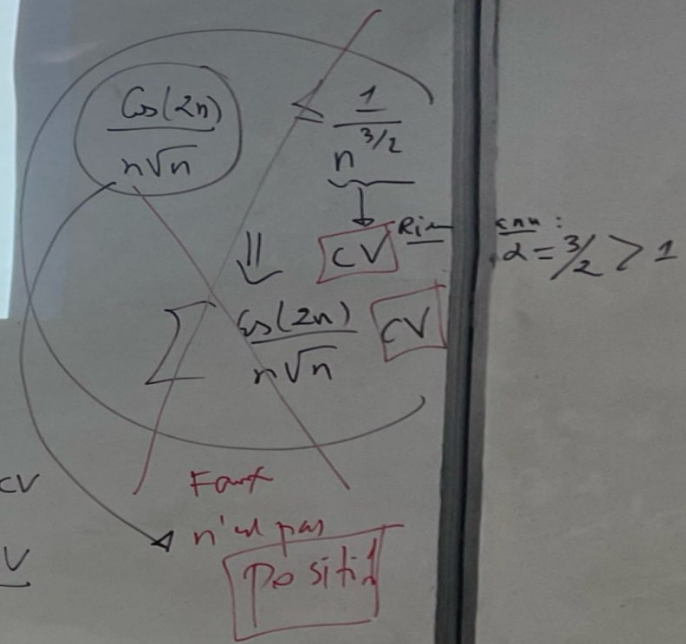
$\forall n \geq 1, \left| \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV $\parallel d = \frac{3}{2} > 1$
Riemann

Alors par comparaison des séries

à termes positifs $\sum \left| \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \right|$ CV

$\Rightarrow \sum \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}$ Abs CV, donc CV



Intégr - généralisée

Q.) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}} dx \quad ?$$

Rép: (Parce à \rightarrow)

$x \mapsto \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}}$ est CPM sur $[1, +\infty[$

$$\forall x \geq 1, \left| \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\text{or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \text{ CV (Riemann; } d = \frac{3}{2} > 1)$$

Donc $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}} \right| dx$ CV, par comparaison des intégrales des fonctions positives.

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}} dx \text{ est } \text{Abs CV, donc } \text{CV}$$

Séries numériques

Q.) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \quad ?$$

Rép:

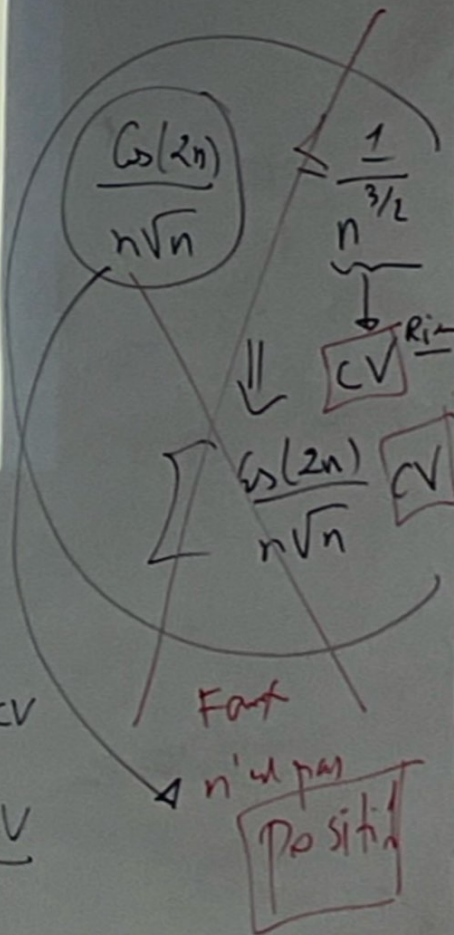
$$\forall n \geq 1, \left| \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ CV } \left\| \begin{array}{l} d = \frac{3}{2} > 1 \\ \text{Riemann} \end{array} \right.$$

Alors par comparaison des séries

à termes positifs $\sum \left| \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \right| \text{ CV}$

$$\Rightarrow \sum \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \text{ Abs CV, donc } \text{CV}$$



$$\text{car: } d = \frac{3}{2} > 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ \star & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

of CPM for $[0, +\infty[$

Exercice (très classique)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$.

Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes

(et donc convergentes):

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$$

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$$

Exercice (très classique)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$.

Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes

(et donc convergentes):

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}$$

$$2) \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\lambda n)}{n^\alpha}$$

$$3) \sum_{n \geq 1} \frac{e^{i\lambda n}}{n^\alpha}$$

Intégr - généralisée

Q) Déterminer tous les réels α tels que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ CV}$$

Réponse :

Définition 3 :

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ CPM, où $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $c \in]a, b[$.

- 1) i) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ convergent.

2) i) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

ii) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$

Intégr - généralisée

Q) Déterminer tous les réels α tels que
 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ CV

Réponse: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ CPM sur $]0, +\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ CV} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ CV} \\ \text{et} \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ CV} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha < 1 \\ \text{et} \\ \alpha > 1 \end{array} \right. \text{ (impossible)}$$

C/c:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ diverge}$$

2) Que dire de l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto \frac{\cos(3x)}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$?

Définition 6 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ CPM, où I intervalle de \mathbb{R} .

- 1) L'intégrale $\int_I f(x)dx$ est dite absolument convergente si et seulement si l'intégrale $\int_I |f(x)|dx$ converge.
- 2) On dit aussi que la fonction f est intégrable sur I .

Sol:

la fonction $x \mapsto \frac{\cos(3x)}{x^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$.

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(3x)}{x^2} \right| dx < +\infty$$

ce qui est vrai, car:

$$\left| \frac{\cos(3x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$
$$\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$