Intégr-généralisée

Q 1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$$

Séries numériques

Q 1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

2) Intégrabilité des fonctions de référence

Proposition 1 : (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *diverge* $\Leftrightarrow$ $\alpha \leq 1$

Intégr - généralisée

Q 1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$$

Rép : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ CV

Riemann

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$

Séries numériques

Q 1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Idem (OK)

Scanned with CamScanner

Intégr. généralisée

Q 1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Rép :

Séries numériques

Q 1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Pr ELAMIRI

2) Intégrabilité des fonctions de référence

Proposition 1 : (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *diverge* $\Leftrightarrow$ $\alpha \leq 1$

Intégr - généralisée

Q1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Rép : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ DIV

Riemann

$\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$

Séries numériques

Q1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Rép : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ DIV

Riemann

$\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$

Intégr - généralisée

Q 1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

Séries numériques

Q1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

2) Intégrabilité des fonctions de référence

Proposition 1 : (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *diverge* $\Leftrightarrow$ $\alpha \leq 1$

Intégr - généralisée

Q 1) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

Rép : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^1}\, dx$ Div $\left\{ \begin{array}{l} \text{Riemann} \\ \alpha = 1 \leqslant 1 \end{array} \right.$

Séries numériques

Q 1) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$$

Rép : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^1}$ Div $\left| \begin{array}{l} \text{Riemann} \\ \alpha = 1 \leqslant 1 \end{array} \right.$

Scanned with CamScanner

Intégr - généralisée

Q) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x\sqrt{x}}\,dx$$

Rép :

Séries numériques

Q.) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}$$

Rép :

Séries numériques

Q.) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \; ?$$

Rép :

Erreur à éviter ⚠ $\Rightarrow$

$$\frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}_{\downarrow \; \boxed{CV}}$$

Riemann : $\alpha = 3/2 > 1$

$$\Downarrow$$

$$\sum \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \quad \boxed{CV}$$

Faux

n'est pas $\boxed{\text{positif}}$

Intégr. généralisée

Q.) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x\sqrt{x}}\,dx \quad ?$$

Rép :

Séries numériques

Q.) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \quad ?$$

Rép :

$\forall n \geq 1,\ \left|\frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV $\Big\|$ $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ Riemann

Alors par comparaison des séries à termes $\boxed{\text{positifs}}$ $\sum \left|\frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}\right|$ CV

$\Rightarrow \sum \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}$ Abs. CV, donc CV

~~$\frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}$~~

~~$\boxed{CV}$ Riem car : $\alpha = \frac{3}{2} > 1$~~

~~$\Downarrow$~~

~~$\sum \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}$ $\boxed{CV}$~~

Faux

n'est pas $\boxed{\text{positif}}$

Intégr. généralisée

Q.) Quelle est la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x\sqrt{x}}\,dx \quad ?$$

Rép. : (Pareil à →

$x \longmapsto \frac{\cos(2x)}{x\sqrt{x}}$ est CPM sur $[1,+\infty[$

$\forall x \geq 1, \left|\frac{\cos(2x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ CV (Riemann ; $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

D'où $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(2x)}{x\sqrt{x}}\right| dx$ $\boxed{\text{CV}}$, par comparaison des intégrales des fonctions $\boxed{\text{positives}}$.

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x\sqrt{x}}\,dx$ est $\boxed{\text{Abs CV}}$, donc $\boxed{\text{CV}}$.

Séries numériques

Q.) Quelle est la nature de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \quad ?$$

Rép. :

$\forall n \geq 1, \left|\frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV $\Big\Vert$ $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ Riemann

Alors par comparaison des séries à termes $\boxed{\text{positifs}}$ $\sum \left|\frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}\right|$ CV

$\Rightarrow \sum \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}$ Abs CV, donc CV

$\cancel{\frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}}$

$\frac{1}{n^{3/2}}$: $\boxed{\text{CV}}$ Riemann car : $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

$\Downarrow$

$\sum \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}$ $\boxed{\text{CV}}$

Faux

n'est pas $\boxed{\text{positif}}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \left]0, +\infty\right[\\ \bigstar & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f CPM sur $[0, +\infty[$

Exercice (très classique)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$.

Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes (et donc convergentes) :

1) $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha}\, dt$$

2) $$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha}\, dt$$

3) $$\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha}\, dt$$

Exercice (très classique)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$.

Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes (et donc convergentes) :

1) $$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}$$

2) $$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\lambda n)}{n^\alpha}$$

3) $$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{i\lambda n}}{n^\alpha}$$

Intégr - généralisée

Q) Déterminer tous les réels α tels que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ CV}$$

Réponse :

Définition 3 :
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ CPM, où $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $c \in]a, b[$.

1) i) On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ convergent.

2) i) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *converge* $\Leftrightarrow \alpha<1$

ii) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *diverge* $\Leftrightarrow \alpha\geq 1$

Intégr - généralisée

Q) Déterminer tous les réels α tels que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ CV}$$

Réponse : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ CPM sur $]0, +\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ CV} \iff \begin{cases} \int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ CV} \\ \text{et} \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ CV} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha < 1 \\ \text{et} \\ \alpha > 1 \end{cases} \quad (\text{impossible})$$

C/c :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ diverge}}$$

2) Que dire de l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto \frac{\cos(3x)}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$?

Définition 6 :

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ CPM, où I intervalle de $\mathbb{R}$.

1) L'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)dx$ est dite **absolument convergente** si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(x)|dx$ converge.

2) On dit aussi que la fonction f est **intégrable** sur I.

Sol :

La fct $x \longmapsto \frac{\cos(3x)}{x^2}$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

$$\iff \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(3x)}{x^2}\right| dx \text{ CV}$$

ce qui est vrai, car :

$$\left| \text{[illegible]} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ CV