

CONCOURS COMMUN SUP 2002

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Extrait

Épreuve de Mathématiques (toutes filières)

Mardi 21 mai 2002 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats :

- doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4,
- sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées,
- colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

PROBLEME D'ALGEBRE

Dans ce problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension trois, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E . La norme de E est notée $\| \cdot \|$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E , Id_E l'application identique de E , o_E le vecteur nul de E .

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien associé à E , $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$.

1. Soit ψ l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1 Montrer que $\frac{4}{3}\psi$ est un demi-tour dont on précisera l'axe D .

1.2 En déduire que ψ est la composée commutative de deux endomorphismes simples de E que l'on précisera.

2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes φ de E pour lesquels :

$$\exists k \in [0; 1[, \forall x \in E, \|\varphi(x)\| \leq k \|x\|$$

2.1 Montrer que ψ appartient à $\mathcal{S} \cap GL(E)$.

2.2 Id_E appartient-il à $\mathcal{S}$?

2.3 Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour $\circ$. $\mathcal{S} \cap GL(E)$ est-il un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$?

2.4 Soit φ un élément de $\mathcal{S}$. Montrer que $\text{Ker}(\varphi - Id_E) = \{o_E\}$. En déduire que $(\varphi - Id_E)$ appartient à $GL(E)$.

2.5 Montrer que $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\exists k \in [0; 1[, \forall x \in E, (\|x\| = 1 \implies \|\varphi(x)\| \leq k)$.

2.6 Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale, à éléments diagonaux strictement inférieurs à 1 en valeur absolue.

Montrer que $\varphi \in \mathcal{S}$.

3. Soit μ l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1 On définit : $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3)$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_3)$.

Vérifier que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E .

3.2 Déterminer la matrice de μ dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire que $\mu \in \mathcal{S}$.

4. Soit φ_α l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est $M_\alpha = \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On se propose de prouver que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$ si et seulement si $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ un vecteur de E de norme 1.

4.1 Montrer que : $\|\varphi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2(1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2)$.

4.2 Le vecteur x s'écrit, dans la base $\mathcal{B}'$ du 3.1 : $x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3$.

Montrer que : $\|\varphi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2(1 + 3x_1'^2)$. En déduire que : $\|\varphi_\alpha(x)\| \leq 2|\alpha|$.

Déterminer l'ensemble des x de E de norme 1 pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité.

4.3 Montrer que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$ si et seulement si $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

5. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé φ appartient à $\mathcal{S}$.

5.1 Soit M un point de $\mathcal{E}$. Montrer que M est invariant par f si et seulement si

$$(\varphi - \text{Id}_E)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}.$$

5.2 En déduire que f admet un point invariant et un seul, que l'on note Ω .

5.3 Justifier l'égalité : $\forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{\Omega f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$.

5.4 On définit la suite (M_n) de points de $\mathcal{E}$ par $M_0 \in \mathcal{E}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = f(M_n)$.

5.4.1 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\overrightarrow{\Omega M_n}\| = 0$.

5.4.2 Soient (x_n) , (y_n) et (z_n) les suites réelles définies par : x_0, y_0 et z_0 sont des réels, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n & - & \frac{1}{4}y_n & + & 1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n & + & \frac{1}{4}z_n & + & \frac{1}{2} \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}x_n & - & \frac{1}{4}z_n & + & 1 \end{cases}.$$

Montrer que (x_n) , (y_n) et (z_n) sont convergentes, et préciser leurs limites respectives.